KAPITOLA 4

KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

4.1. Parametrizace křivek

Definice. *Křivka* φ v $\Omega \subset \mathbb{R}_r$ (nebo též *po částech hladká křivka*) s definičním intervalem $I \subset \mathbb{R}$ je spojité zobrazení $\varphi : I \to \Omega$, pro které existují reálná čísla $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, že φ má spojité první derivace (včetně jednostranných derivaci v eventuálních krajních bodech intervalu) na každém z intervalů $I \cap (-\infty, t_1\rangle$, $I \cap \langle t_i, t_{i+1}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $I \cap \langle t_n, +\infty)$. Množina $\langle\varphi\rangle = \varphi(I)$ se nazývá *geometrickým obrazem* křivky φ.

Regulární křivka φ je taková křivka, pro kterou derivace $\varphi'(t)$ existuje, je spojitá a nenulová ve všech bodech svého definičního intervalu I (v eventuálních krajních bodech se myslí jednostranné derivace). Vektor $\varphi'(t)$ se nazývá *tečným vektorem* k φ v bodě $\varphi(t)$.

Křivka φ se nazývá *jednoduchou*, je-li zobrazení φ prosté.

Křivku φ nazveme *uzavřenou*, je-li $I = \langle a, b\rangle$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$ a *jednoduchou uzavřenou*, pokud je navíc φ prosté zobrazení na $\langle a, b)$.

Je-li $I = \langle a, b\rangle$, pak bod $\varphi(a)$ resp. $\varphi(b)$ se nazývá *počátečním* resp. *koncovým* bodem křivky φ.

Opačnou křivkou (nebo také křivkou *s opačnou parametrizací*) ke křivce φ se nazývá křivka $-\varphi$, definovaná předpisem

$$(-\varphi)(t) = \varphi(-t) \text{ pro } t \in \{s, -s \in I\},$$

kde I je definiční interval křivky φ.

Řetězec c dimenze 1 v Ω je konečný formální součet

$$c = \sum n_i \varphi_i,$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

kde n_i jsou celá čísla a φ_i jsou křivky v Ω.

Jsou-li φ, ψ dvě křivky takové, že koncový bod φ splývá s počátečním bodem ψ, pak formální součet $\varphi + \psi$ nazveme *navázáním* křivek φ a ψ.

Hranicí $\partial\varphi$ křivky φ s definičním intervalem $\langle a, b\rangle$ se nazývá formální součet bodů $\{\varphi(b)\} + (-1).\{\varphi(a)\}$.

Hranicí řetězce $c = \sum n_i\varphi_i$ se nazývá konečná formální lineární kombinace s celočíselnými koeficienty $\partial c = \sum n_i \partial\varphi_i$.

Řetězec c se nazývá *cyklem*, je-li jeho hranice nulová. Uzavřená jednoduchá křivka se obvykle nazývá *jednoduchým cyklem.*

Poznámky.

1. Často se pod pojmem „křivka" v $\mathbb{R}_r$ rozumí to, co jsme v definici výše nazvali geometrickým obrazem křivky, tj. taková podmnožina $M \subset \mathbb{R}_r$, která je obrazem nějakého intervalu I při nějakém zobrazení φ, majícím v definici uvedené vlastnosti. Pak se takové zobrazení φ, pro něž je $M = \langle\varphi\rangle$, nazývá *parametrickým vyjádřením* (*parametrizací*) „křivky" M. „Křivka" M má zřejmě mnoho různých parametrizací. Připomeňme ještě, že zobrazení φ, zadávající křivku, určuje nejen její geometrický obraz, ale i způsob probíhání po něm při růstu parametru. Jsou-li φ a ψ dvě jednoduché regulární křivky a $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$, pak jsou dvě možnosti: funkce $F(t) = (\psi^{-1} \circ \varphi)(t)$ je rostoucí, anebo je klesající. V prvním případě mluvíme o stejném smyslu probíhání po $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$, ve druhém o opačném smyslu probíhání.

2. Pro účely integrace, tj. jako integrační obory v křivkovém integrálu (viz definice v oddílu 4.3. dále) bývá zvykem řetězec $(-1).\varphi$ ztotožňovat s křivkou $-\varphi$, opačnou ke křivce φ. Řetězec $c = \sum n_i\varphi_i$ pak vlastně reprezentuje geometricky sjednocení konečně mnoha křivek φ_i(je-li $n_i > 0$) resp. $-\varphi_i$ (je-li $n_i < 0$) a $|n_i|$ je odpovídající násobnost dané křivky, tj. kolikrát je proběhnuta.

3. Obvyklá definice *navázání* dvou křivek požaduje navíc eventuální změnu jejich parametrizací tak, aby sjednocení jejich definičních intervalů byl opět interval. Pro účely integrace přes křivky je tato procedura zbytečná a je jednodušší uvažovat navázání dvou křivek jako speciální případ formálního součtu křivek, tak jak jsme to udělali v naší definici výše. Formální součet křivek (tj. řetězec) je potřebný tehdy, chceme-li například popsat hranice vícenásobně souvislých oblastí v rovině (například kruhu s s několika vyjmutými malými kroužky). Je možné také definovat navázání $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$ konečně mnoha křivek eventu-

álně „rozdíl" $\varphi - \psi$ křivek φ a ψ. V našem pojetí (tj. bez požadavku eventuální změny parametrizace) to jsou opět speciální případy řetězců.

4. Hranice ∂c řetězce $c = \sum n_i \varphi_i$ je zřejmě definována jen tehdy, jsou-li definiční intervaly všech křivek φ_i uzavřené intervaly $\langle a_i, b_i \rangle$. Pro pořádek stojí za to vysvětlit, co znamená výraz $\sum n_i(\{\varphi_i(b_i)\} - \{\varphi_i(a_i)\})$. Každý bod figurující v toto výrazu musíme vzít s koeficientem rovným součtu všech koeficientů, s nimiž se tam tento bod vyskytuje. Je-li tento součet roven 0, pak tento bod vypustíme. Jestliže po této proceduře nezbude žádný bod s nenulovým koeficientem, říkáme že hranice ∂c je nulová.

Definice. Nechť φ je regulární křivka na $\langle a, b \rangle$. Definujme funkci

$$s(t) = \int_a^t ||\varphi'(\eta)||\, d\eta,$$

kde pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{R}_r$ je $||x|| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2)^{1/2}$. Pak pro $\tau \in (a, b\rangle$ $s(\tau)$ nazýváme *délkou* křivky $\varphi(t)$, $t \in \langle a, \tau \rangle$, speciálně $\ell = s(b)$ se nazývá *délkou* křivky φ. Funkce $s(t)$ je rostoucí a je-li $t(s)$, $s \in \langle 0, \ell \rangle$ funkce k ní inverzní, pak křivku $\psi(s) = \varphi(t(s))$, $s \in \langle 0, \ell \rangle$ nazveme *přirozenou parametrizací* (*parametrizací podle délky*) křivky φ.

Stojí za to připomenout, že při počítání křivkových integrálů se často zadává fakticky jen geometrický obraz křivky (s uvedením způsobu probíhání po něm), a je proto důležité umět najít nějakou parametrizaci této křivky. Přitom se ukazuje, že z hlediska počítání různé „ekvivalentní" parametrizace nebudou stejně vhodné. Neexistuje také žádný obecný postup, jak parametrizace hledat.

Příklad A. (explicitní zadání křivky) Je-li geometrický obraz křivky v $\mathbb{R}_2$ zadán jako graf funkce $x_2 = f(x_1)$, $x_1 \in I$, pak jednu jeho parametrizaci máme hned: $x_1 = t$, $x_2 = f(t)$, $t \in I$ (za parametr bereme první souřadnici bodu tohoto geometrického obrazu). Podobně to je i v případě křivky v $\mathbb{R}_r$, máme-li její geometrický obraz zadán $(r-1)$ funkcemi $x_i = f_i(x_1)$, $i = 2, 3, \dots, r$, $x_1 \in I$. Tato parametrizace nemusí být nejvhodnější, jak je vidět z následujícího příkladu: horní polokružnici o poloměru $a > 0$ se středem v počátku můžeme zadat funkcí $x_2 = \sqrt{a^2 - x_1^2}$, $x_1 \in \langle -a, a \rangle$, což vede k parametrizaci

$x_1 = t$, $x_2 = \sqrt{a^2 - t^2}$, $t \in \langle -a, a\rangle$. Při této parametrizaci se půlkružnice probíhá (při růstu parametru) po směru hodinových ručiček. Derivace pravé strany ve druhé rovnosti není spojitá na $\langle -a, a\rangle$. Vezmeme-li ale parametrizaci $x_1 = a\cos\tau$, $x_2 = a\sin\tau$, $\tau \in \langle 0, \pi\rangle$, pak ta už poslední nedostatek nemá. Pozorný čtenář může namítnout, že při ní se půlkružnice při vzrůstu parametru probíhá proti směru hodinových ručiček. Tento nedostatek už ale odstraní parametrizace $x_1 = -a\cos\tau$, $x_2 = a\sin\tau$, $\tau \in \langle 0, \pi\rangle$.

Příklad B. (implicitní zadání křivky) Je-li křivka v $\mathbb{R}_r$ zadána $(r-1)$ rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$, $i = 2, 3, \ldots, r$, pak v případě, že z této soustavy rovnic lze vyjádřit x_i, $i = 2, 3, \ldots, r$ jako funkce x_1, tj. $x_i = f_i(x_1)$, $i = 2, 3, \ldots, r$, jsme se dostali do situace z příkladu A. Někdy je takové vyjádření možné jen pro část dané křivky, například pro kružnici $x_1^1 + x_2^2 = a^2$ máme $x_2 = \pm\sqrt{a^2 - x_1^2}$ pro horní (s plusem) a dolní (s minusem) polokružnici, zatímco parametrizace $x_1 = a\cos\tau$, $x_2 = a\sin\tau$, $\tau \in \langle 0, 2\pi\rangle$ dá celou kružnici a navíc je spojitě derivovatelná.

Příklad C. (křivka v $\mathbb{R}_2$ v polárních souřadnicích) Křivku v $\mathbb{R}_2$ můžeme zadat v polárních souřadnicích r a φ předpisem $r = f(\varphi)$, kde f je nějaká funkce definovaná na jistém intervalu I. Příkladem budiž například spirála $r = \varphi$, $\varphi \in \langle 0, +\infty)$. V takovém případě opět máme hned jednu její parametrizaci: $x_1 = f(\varphi)\cos\varphi$, $x_2 = f(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0, +\infty)$ (za parametr bereme polární úhel).

Příklad D. (parametrizace lomených čar) Máme parametrizovat obvod trojúhelníka s danými vrcholy $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $Z = (z_1, z_2, z_3)$. Předepsaná orientace (směr probíhání) je dána pořadím bodů X, Y, Z.

Řešení. Přesná formulace této úlohy je následující: máme najít jednoduchou uzavřenou křivku φ takovou, že 1) $\langle\varphi\rangle$ je obvod daného trojúhelníka a 2) pro parametry t_1, t_2, t_3, odpovídající bodům úseček XY, YZ, ZX platí $t_1 < t_2 < t_3$. Užijeme známý vzoreček pro parametrizaci úsečky s počátečním bodem X a koncovým bodem Y:

$$(*) \qquad t \in \langle 0, 1\rangle \to X + t(Y - X) = tY + (1-t)X.$$

Analogicky

$$u \in \langle 0, 1\rangle \to Y + u(Z - Y) = uZ + (1-u)Y,$$
$$v \in \langle 0, 1\rangle \to Z + v(X - Z) = vX + (1-v)Z$$

jsou parametrizace úseček YZ a ZX. Zbývá ještě „posunout” parametry v posledních dvou řádcích, aby spojitě navazovaly na $(*)$, tj. v předposledním řádku položit $u = t - 1$, $t \in \langle 1, 2\rangle$ a v posledním $v = t - 2$, $t \in \langle 2, 3\rangle$, takže hledaná (jedna) parametrizace bude $t \to \varphi(t)$, $t \in \langle 0, 3\rangle$, kde

$$\varphi(t) = \begin{cases} X + t(Y - X) & \text{pro } t \in \langle 0, 1\rangle, \\ Y + (t-1)(Z - Y) & \text{pro } t \in \langle 1, 2\rangle, \\ Z + (t-2)(X - Z) & \text{pro } t \in \langle 2, 3\rangle. \end{cases}$$

Přirozenou parametrizací bude $\psi(s)$, $s \in \langle 0, d_1 + d_2 + d_3\rangle$, kde d_1 je vzdálenost bodů X a Y, d_2 je vzdálenost bodů Y a Z, d_3 je vzdálenost bodů Z a X a

$$\psi(s) = \begin{cases} X + \frac{s}{d_1}(Y - X) & \text{pro } s \in \langle 0, d_1\rangle, \\ Y + \frac{s-d_1}{d_2}(Z - Y) & \text{pro } s \in \langle d_1, d_1 + d_2\rangle, \\ Z + \frac{s-d_1-d_2}{d_3}(X - Z) & \text{pro } s \in \langle d_1 + d_2, d_1 + d_2 + d_3\rangle. \end{cases}$$

Obecněji, lomenou čáru, určenou body $X^{(1)}$, $X^{(2)}$,. . . ,$X^{(n)}$ eukleidovského prostoru $\mathbb{R}_r$, můžeme přirozeně parametrizovat zobrazením $\psi(s)$, $s \in \langle 0, \sum_{i=1}^{n-1} d_i\rangle$, kde $d_i = ||X^{(i)} - X^{(i+1)}||$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ a

$$\psi(s) = X^{(1)} + \frac{s}{d_1}(X^{(2)} - X^{(1)}) \text{ pro } s \in \langle 0, d_1\rangle$$

a

$$\psi(s) = X^{(i)} + \frac{s - \sum_{j=1}^{i-1} d_j}{d_i}(X^{(i+1)} - X^{(i)}) \text{ pro } s \in \langle \sum_{j=1}^{i-1} d_j, \sum_{j=1}^{i} d_j\rangle,$$

$i = 2, 3, \dots, n - 1$.

Příklad E. (parametrizace elipsy) Máme parametrizovat elipsu, zadanou implicitně rovnicí ($a > 0$, $b > 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Řešení. Kladně orientovaná parametrizace (*probíhání proti ručičkám hodinovým*) je například

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$