1 Úvod

1.1 Energetické úvahy

Po dlouhou dobu zůstávala otázka fyziků a astrofyziků, proč hvězdy vydrží bez viditelné změny zářit tak dlouho, nezodpovězena. Zkusme nejprve různé zdroje energie posoudit jednoduchými energetickými úvahami a všimněme si přitom, že zdrojů energie hvězd je ve skutečnosti vícero.

Anaxagorás v 5. st. př. n. l. tvrdil, že hvězda, respektive Slunce, je rozžhavená masa železa. Kdyby tomu tak bylo, celkovou tepelnou energii obsaženou v železe bychom mohli odhadnout jako

$$Q \simeq M_\odot c \Delta T \doteq 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot 450\,\mathrm{J/K/kg} \cdot 6\,000\,\mathrm{K} \doteq 5{,}4 \cdot 10^{36}\,\mathrm{J}\,, \tag{1.1}$$

kde $M_\odot$ je hmotnost Slunce, c měrná tepelná kapacita a ΔT změna teploty.[1] To se může zdát hodně, ale při současném zářivém výkonu Slunce $L_\odot = 3{,}8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ to znamená, že by Slunce vydrželo zářit po dobu

$$\tau \simeq \frac{Q}{L_\odot} \doteq \frac{5{,}4 \cdot 10^{36}\,\mathrm{J}}{3{,}8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{J/s}} \doteq 1{,}4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} \doteq 460\,\mathrm{rok\mathring{u}}\,, \tag{1.2}$$

což je evidentně velmi málo. Nicméně takové jednoduché chladnutí (jen s větším ΔT a menším L) probíhá u bílých trpaslíků v pozdních fázích hvězdného vývoje nebo u hnědých trpaslíků.

Ještě v 19. století existovaly úvahy o tom, zda je možné, aby Slunce získávalo svou zářivou energii chemickými reakcemi, tedy spalováním tuhých či tekutých látek. Názor, že to není pravděpodobné, vyslovil již John Herschel. Ostatně pro oxidaci vodíku $2{}^1\mathrm{H}_2 + {}^{16}\mathrm{O}_2 \rightarrow 2\mathrm{H}_2\mathrm{O}$, která má velkou výhřevnost $H \doteq 100\,\mathrm{MJ/kg}$, je

$$Q \simeq M_{\text{vodíku}} H \doteq \frac{2 \cdot 10^{30}}{9} \cdot 10^{8}\,\mathrm{J} \doteq 2{,}5 \cdot 10^{37}\,\mathrm{J} \tag{1.3}$$

a použijeme-li stejný trik se zářivým výkonem, vyjde charakteristická doba $\tau = Q/L_\odot \doteq 2\,000\,\mathrm{rok\mathring{u}}$.

[1] Řečtí filosofové samozřejmě neoperovali s pojmy teplo, měrná tepelná kapacita, neznali zákon zachování energie, ani nezměřili hmotnost a teplotu Slunce. V tomto kontextu se na odhad musíme dívat.

Lékař J. R. Mayer uvažoval roku 1846 o tom, že by Slunce mohlo získávat energii dopady meteoritů. Každou sekundu by se ovšem na záření musela přeměňovat kinetická energie $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 \simeq L_\odot \cdot 1\,\mathrm{s}$, což by při rychlostech dopadu $v \simeq 100\,\mathrm{km/s}$ znamenalo změnu hmotnosti

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{2L_\odot}{v^2} \doteq \frac{2 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{26}}{(10^5)^2}\,\mathrm{kg/s} \doteq 7{,}6 \cdot 10^{16}\,\mathrm{kg/s} \doteq 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,M_\odot/\mathrm{rok}\,, \tag{1.4}$$

čili $\tau \simeq M_\odot/(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t) \simeq 10^6$ roků. Navíc by se přírůstek hmotnosti musel měřitelně projevit na změně drah planet.[2] Pro Slunce tedy tento zdroj nepřipadá v úvahu, ale taková akrece planetesimál byla hlavním zdrojem tepelné energie planet.

H. von Helmholtz roku 1854 přišel místo toho s hypotézou, že Slunce září díky uvolňování energie gravitačním smršťováním. Gravitační potenciální energie koule o konstantní hustotě je rovna $E_\mathrm{G} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$. Podle viriálového teorému platí pro gravitačně vázané systémy $\langle E_\mathrm{K}\rangle = -\frac{1}{2}\langle E_\mathrm{G}\rangle$, tudíž celková mechanická energie hvězdy je $E(R) = E_\mathrm{K} + E_\mathrm{G} = \frac{1}{2}E_\mathrm{G}$. V nekonečnu byla pochopitelně energie $E(\infty) = 0$; při kolapsu se tedy uvolní jejich rozdíl[3]

$$\Delta E = E(\infty) - E(R) = \frac{3}{10}\frac{GM^2}{R} \doteq 0{,}3 \cdot \frac{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8}\,\mathrm{J} \doteq 1{,}1 \cdot 10^{41}\,\mathrm{J}\,. \tag{1.5}$$

Odpovídající doba zářivé stability

$$\tau_\mathrm{KH} \simeq \frac{\Delta E}{L_\odot} \simeq 10^7\,\text{roků} \tag{1.6}$$

se nazývá *Kelvinova–Helmholtzova škála.* Zlepšující se odhady stáří Země ale vyloučily i tuto možnost, třebaže se gravitační kontrakce v určitých stadiích hvězdného vývoje skutečně významně uplatňuje (například při přechodu od hlavní posloupnosti do stadia červeného obra, ve fázi T Tauri nebo při výbuchu supernovy).

Více než 97 % látky v nitru Slunce je plně ionizováno, přičemž na každý atom připadá řádově $E_\mathrm{ion} \simeq 13{,}9\,\mathrm{eV}$ a celkem by se při rekombinaci uvolnilo

$$E \simeq \frac{M_\odot}{m_\mathrm{H}} E_\mathrm{ion} \doteq \frac{2 \cdot 10^{30}}{1{,}7 \cdot 10^{-27}} \cdot 13{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \doteq 2{,}7 \cdot 10^{39}\,\mathrm{J}\,; \tag{1.7}$$

doba $\tau \simeq 200\,000$ roků. Stupeň ionizace ve Slunci se v současnosti prakticky nemění, ale třeba při gravitačním kolapsu mezihvězdného mračna se právě na ionizaci neutrálních atomů spotřebovává nezanedbatelné množství tepelné energie, čímž klesne teplota oblaku a podpoří se další smršťování protohvězdy.

[2] Podle 3. Keplerova zákona je $a^3/P^2 \propto M$, po diferencování (při $a = \mathrm{konst.}$) $\mathrm{d}M = -2\frac{a^3}{P^3}\mathrm{d}P$ a $\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M}{M} \simeq 10^{-6} \simeq 30\,\mathrm{s}$ za rok, což se ovšem nepozoruje.

[3] Jinými slovy: při nekonečném poloměru jsou celková, gravitační potenciální i kinetická energie rovné nule. Hmotný element při volném pádu z nekonečna prolétává ve vzdálenosti R od centra parabolickou rychlostí $v_\mathrm{p} = \sqrt{2GM/R}$. Aby neodletěl po parabole znovu do nekonečna, ale usadil se na kruhové dráze o poloměru R, musí být zbrzděn nějakou srážkou na kruhovou (keplerovskou) rychlost $v_\mathrm{k} = \sqrt{GM/R}$. Rozdíl odpovídajících kinetických energií se disipuje na teplo.

Po objevu radioaktivity Becquerelem v roce 1896 bylo evidentní, že se jedná o velmi vydatný zdroj. Při postupném rozpadu jediného atomu uranu ^{235}U se uvolní $E_{\mathrm{U}} \doteq 200\,\mathrm{MeV}$; celková energie by tedy mohla být až

$$E \simeq \frac{M_\odot}{m_{\mathrm{U}}}\,E_{\mathrm{U}} \doteq \frac{2\cdot 10^{30}}{235\cdot 1{,}7\cdot 10^{-27}}\cdot 2\cdot 10^{8}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \doteq 1{,}6\cdot 10^{44}\,\mathrm{J} \tag{1.8}$$

a odpovídající $\tau \simeq 14$ miliard let. Na hvězdách nicméně prvky těžší než železo ve velkém množství nepozorujeme.

Teprve koncem třicátých let dvacátého století byl nalezen skutečný zdroj stabilního záření hvězd: *jaderná syntéza prvků*, zejména slučování jader vodíku na jádra helia — viz např. Weizsäcker (1937), Bethe a Critchfield (1938) a Bethe (1939). Když se při jedné přeměně „$4\mathrm{p} \rightarrow \alpha$“ uvolní energie $E_{\mathrm{H}} \doteq 26\,\mathrm{MeV}$, vychází řádový odhad celkové energie

$$E_{\mathrm{nuk}} \simeq \frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{M_{\text{jádra}\odot}}{m_{\mathrm{H}}}\,E_{\mathrm{H}} \doteq 0{,}19\cdot\frac{5\cdot 10^{29}}{1{,}7\cdot 10^{-27}}\cdot 26\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \doteq 2{,}3\cdot 10^{44}\,\mathrm{J} \tag{1.9}$$

a *nukleární časová škála*

$$\tau_{\mathrm{nuk}} \simeq \frac{E_{\mathrm{nuk}}}{L_\odot} \simeq 2\cdot 10^{10}\,\text{roků}\,. \tag{1.10}$$

Tím byla otevřena cesta ke konstrukci realistických modelů stavby a vývoje hvězd.

1.2 Zjednodušení použitá při konstrukci sférických modelů

Je třeba si uvědomit, že téměř celá dosavadní teorie stavby a vývoje hvězd je vybudována a propočtena za pomoci *jednorozměrných modelů sféricky symetrických hvězd*. Diferenciální rovnice popisující stavbu vypadají následovně (jejich odvozováním se zabýváme v kapitole 4; jedná se o rovnice zachování hmoty, hydrostatické rovnováhy, tepelné rovnováhy a přenosu energie)[4]

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M_R} = \frac{1}{4\pi R^2\rho}\,, \tag{1.11}$$

[4]Označení je následující: R poloměr, M_R hmotnost obsažená v kouli o poloměru R, ρ hustota, P tlak, L_R zářivý výkon vycházející z koule o poloměru R, ϵ_{nuk} měrný výkon jaderných reakcí, T teplota, X, Y a Z abundance vodíku, helia a kovů, κ opacita, c_P tepelná kapacita při konstantním tlaku, λ koeficient vyjadřující příspěvek nerelativistické degenerace elektronového plynu, μ střední molekulová hmotnost.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}M_R} &= -\frac{GM_R}{4\pi R^4}\,, &(1.12)\\
\frac{\mathrm{d}L_R}{\mathrm{d}M_R} &= \epsilon_{\mathrm{nuk}}(\rho,T,X,Y,Z)\,, &(1.13)\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}M_R} &= -\frac{GTM_R}{4\pi PR^4}\nabla\,, &(1.14)
\end{aligned}
$$

kde gradient $\nabla = \min(\nabla_{\mathrm{rad}}, \nabla_{\mathrm{ad}})$, $\nabla_{\mathrm{rad}} = \frac{3\kappa(\rho,T,X,Y,Z)PL_R}{16\pi acGM_RT^4}$, $\nabla_{\mathrm{ad}} = \frac{\delta P}{c_P\rho T}$, $\delta = -\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}\right)_P$, a soustavu uzavírá stavová rovnice hvězdné látky

$$P = \frac{\rho}{\mu}\Re T\lambda(\rho,T) + \frac{a}{3}T^4\,, \qquad (1.15)$$

kde $\mu^{-1} \doteq \frac{3}{2}X + \frac{1}{4}Y + 0{,}5$. Toto zjednodušení má své oprávnění — ukazuje se totiž, že hmota hvězd má vysoký stupeň koncentrace směrem ke středu. Všechny stavové veličiny lze proto pro daný model hvězdy považovat za funkce jediné proměnné, např. $R(M_R), \rho(M_R), P(M_R), L_R(M_R), T(M_R)$, kde M_R označuje hmotnost obsaženou v kouli o poloměru R.[5]

Přesto je dobře si uvědomit, jaká další zjednodušení jsou činěna:

- Zanedbává se *rotace* hvězd (odstředivá síla, změna tvaru hvězdy, diferenciální rotace). Modely, které berou rotaci hvězd v potaz a opouštějí předpoklad sférické symetrie, existují zatím jen ve velmi zjednodušené formě, jak o tom bude řeč později.

- Zanedbávají se možná *magnetická pole* a jejich vliv na stavbu hvězdy.

- V podpovrchových vrstvách se používá nedokonalá *teorie konvekce*, která empiricky volí poměr $\alpha = l/H_P$ mezi střední volnou dráhou l konvektivního elementu a tlakovou škálou $H_P = -(\mathrm{d}\ln P/\mathrm{d}R)^{-1} = -P/(\mathrm{d}P/\mathrm{d}R)$ (angl. pressure scale height). Předpokládá se, že termodynamické procesy v nitru hvězdy probíhají adiabaticky, což je ale dobrá aproximace. U hmotnějších hvězd zůstává zdrojem nejistoty i jev, kterému se říká *konvektivní přestřelování* (angl. convective overshooting), totiž možnost, že konvekce díky setrvačnosti konvektivních elementů zasáhne i do vrstev nad konvektivní zónou.

- Přetrvává určitá nepřesnost v hodnotách extinkčních (neboli opacitních) koeficientů $\kappa(\rho,T,X,Y,Z)$ hvězdné látky, i když se situace v posledních letech hodně zlepšila, a tyto koeficienty se pro výpočty hvězdných niter používají středované přes celé elektromagnetické spektrum.

[5] Použití M_R jako nezávislé proměnné je výhodnější než použití R, zejména z důvodů numerických. V řídkých podpovrchových vrstvách se dokonce jako nezávislá proměnná používá tlak P.

- Přetrvává i nejistota v určení účinných průřezů jaderných reakcí, což vede obecně k větším chybám v časové škále, než v povrchových charakteristikách modelových hvězd. Podle nejnovějších studií se nejistoty v určení účinných průřezů reakcí pohybují v rozmezí 5 až 40 %.

- Pro velmi chladné nebo velmi husté hvězdy zůstávají určité nejistoty ve stavové rovnici.

- Pro některé hvězdy jsou atmosféry nestabilní a dochází z nich ke ztrátě hmoty formou *hvězdného větru*. To se při modelování buď zcela zanedbává, nebo je použit jednoduchý parametrický popis ztráty hmoty hvězdným větrem $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$.

- Problémem z hlediska modelování zůstávají i ta stadia vývoje, kdy dochází k dramatickým změnám na dynamické škále, které nelze korektně popsat stacionárními modely.

1.3 Model našeho Slunce

Ještě předtím, než se začneme teorii stavby a vývoje hvězd věnovat soustavně, může být užitečné ilustrovat míru její úspěšnosti na příkladu modelování našeho Slunce v jeho současném vývojovém stadiu.

Je dobré si uvědomit, že i současné počítání modelu Slunce představuje svého druhu magii. Obvykle se začíná s homogenním modelem, kontrahujícím k hlavní posloupnosti nulového věku, který je ještě ve stavu před započetím slučování deuteria. Zkusmo se volí:

1. poměr $\alpha = l/H_P$ mezi střední volnou dráhou a tlakovou škálou;

2. počáteční hmotnostní procento vodíku X, respektive helia Y;

3. počáteční obsah těžkých prvků Z,

a to tak, aby výpočet pro vývojový model o hmotě Slunce v čase 4,56 miliardy let od hlavní posloupnosti nulového věku správně reprodukoval: (i) současný pozorovaný poloměr $R_\odot$; (ii) jeho zářivý výkon $L_\odot$; (iii) poměr Z/X ve fotosféře. Za hlavní posloupnost nulového věku se přijímá okamžik, kdy nukleární reakce přispívají více než 50 % k zářivému výkonu Slunce. Většina novějších modelů vede na poměr $\alpha \simeq 2$.