Předmluva

Tato skripta asi nebudou patřit mezi obvyklé učební texty, na jaké jsou studenti matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy (MFF UK) zvyklí, a to jak co se týče tématu, tak stylistické formy. Vznikala postupně: na počátku byla rukou psaná příprava na výběrovou přednášku *Struktury podmíněné nezávislosti*, kterou jsem měl (s občasnými přestávkami) na katedře pravděpodobnosti a matematické statistiky (KPMS) MFF UK od roku 2003. Účelem oné výběrové přednášky bylo seznámit studenty magisterského studia s tématem, kterému jsem věnoval své výzkumné úsilí, a spolu se mnou i někteří mí kolegové z Ústavu teorie informace a automatizace Akademie věd České republiky (ÚTIA AVČR). Přednáška byla tak trochu mezioborová; byla určena nejenom studentům oboru pravděpodobnost a matematická statistika, ale také studentům informatiky, případně kombinatoriky.

Protože účelem bylo spíše přitáhnout pozornost studentů k této, podle mého názoru zajímavé, oblasti bádání, zvolil jsem neformální styl prezentace, který jsem si jako externista mohl zajisté dovolit. Na druhé straně jsem se snažil o matematickou korektnost a vyvarovat se nepřesností. Později, s potřebou každoročně upravovat a doplňovat obsah přednášky, jsem přišel s myšlenkou vytvořit si elektronický záznam, který by mohl být snadno editován. V tomto směru mi byla značně nápomocna paní Marie Kolářová, administrativní pracovnice našeho oddělení matematické teorie rozhodování (MTR) na ÚTIA. Rukopis postupně přepsala do formy zdrojového souboru pro LaTeX . Já jsem potom doplnil obrázky a upravil matematické formule tak, aby výsledný text mohl sloužit jako doplňkový studijní materiál pro studenty navštěvující mou přednášku.

Další lidé, kteří si zaslouží můj dík za pomoc, rady či doporučení jsou mí kolegové a spolupracovníci z oddělení MTR ÚTIA AVČR či někdejší Laboratoře inteligentních systémů na VŠE Praha, zejména František Matúš, Radim Jiroušek, Jiřina Vejnarová, Jiří Vomlel, Marta Vomlelová a Tomáš Kroupa. Dále jsem samozřejmě vděčen kolegům z KPMS MFF UK nejenom za příležitost konat na MFF UK výběrovou přednášku, ale i za možnost vydat text jako skripta.

Když jsem před několika lety začal uvažovat o vydání skript, připsal jsem další dvě kapitoly, aby text komplexněji pokrýval tematiku grafických modelů struktur podmíněné nezávislosti (PN). Jedná se o kapitolu o řetězcových grafech, což bude patrně jediný česky psaný přehled nedávných výsledků z této oblasti, a o kapitolu o učení grafických modelů, kteréžto téma jsem do své výběrové přednášky doplnil na žádost pana Pavla Schlesingera, jednoho z někdejších posluchačů mé přednášky.

Také jsem o pročtení textu a připomínky požádal dva své mladší kolegy: pana Václava Lína, toho času PhD studenta mého kolegy Jiřího Vomlela, a pana Jana Zouhara, toho času pedagoga na VŠE v Praze, který navíc nedávno absolvoval bakalářské studium na KPMS MFF UK (coby svou druhou vysokou školu). Za jejich náměty jsem jim velmi vděčen a snažil jsem se text na základě jejich připomínek upravit. Dokonce jsem pana Zouhara požádal o konkrétnější spolupráci, totiž aby mi byl nápomocen i s technickou úpravou skript. Text tím dostal jednotnou formu, doplnili jsme seznam literatury a rejstřík. Tímto se pan Zouhar stal tak trochu spoluautorem skript; je jasné, že právě díky jeho doporučením a technické pomoci se text stal mnohem přehlednějším. Proto je uveden i v tiráži. Později text ještě pročetl pan Robert Brunetto, PhD student kolegyně Marty Vomlelové, a na základě jeho připomínek jsem ještě upřesnil některé pasáže. Za další připomínky jsem vděčen recenzentům, kteří doporučili vypustit přehledové přílohy a zpřístupnit je elektronicky. Toto flexibilní řešení umožní v budoucnu případně doplnit další elektronické přílohy, například příklady a cvičení. Tyto doplňkové materiály budou dostupné na webovské adrese

`http://staff.utia.cas.cz/studeny/skriptaSPN.html`.

Pokud čtenář při listování skripty nabude dojmu, že místy je text až příliš elementární pro studenta MFF UK, který by měl být navyklý na matematicky hutné specializované texty, pak nechť ví, že bylo mým vědomým záměrem napsat text spíše elementární. Proto jsem mnoho prostoru věnoval vysvětlování motivace a občas i interpretaci výsledků. Pokud čtenáře téma zaujme, pak hlubší texty věnované této problematice nalezne v seznamu literatury. Také některá pokročilejší témata, jako například lineárně-algebraická metoda popisu struktur PN, kterou jsem nabídl ve své monografii z roku 2005, jsou opomenuta. Stejně tak chybí podrobnosti o pojmu PN v alternativních kalkulech nejistoty v umělé inteligenci, či o neexistenci axiomatické charakterizace pravděpodobnostní PN. Prostě krátce, text je zamýšlen pouze jako úvod do problematiky struktur PN.

Co se týče možného okruhu čtenářů, doufám, že kromě potenciálních budoucích abonentů mé výběrové přednášky na MFF UK by se mohli najít i další čtenáři. Skripta by se případně mohla uplatnit jako doplňkový učební text pro studenty jiných vysokých škol, například ČVUT či VŠE Praha (včetně pobočky v Jindřichově Hradci). Na některých z těchto škol totiž probírají tématiku grafických modelů v rámci jiných předmětů.

Na závěr se sluší poděkovat sponzorům. Za to, že jsem se mohl věnovat tomuto tématu vděčím své domovské instituci, totiž Ústavu teorie informace a automatizace AVČR, v.v.i. Důležitá pro mne byla i finanční podpora z Grantové Agentury České republiky; konkrétně, příprava tohoto učebního textu probíhala v rámci projektu GAČR číslo 201/08/0539 ale dokončen byl až v průběhu projektu GAČR číslo 13-20012S.

V Praze 28. 4. 2014 Milan Studený

Úvod – motivační poznámky

Intuitivní smysl pojmu PN

- Jsou-li $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jevy, pak *matematická definice* jejich nezávislosti je následující požadavek:
$$P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) \cdot P(\mathbb{B}),$$
přičemž *intuitivní smysl* je, že *pravděpodobnost nastání jevu* $\mathbb{A}$ *není ovlivněna nastáním jevu* $\mathbb{B}$ *a naopak.*

  Příklad (dvě mince). Následující dva jevy jsou zřejmě nezávislé:

  jev $\mathbb{A}$ = na první minci padne orel,
  jev $\mathbb{B}$ = na druhé minci padne hlava.

- Povětšinou nás nezajímá nezávislost jednotlivých jevů, ale spíše *nezávislost událostí*, které těmto jevům odpovídají.

  Příklad (dvě mince podruhé). Příklad očividně nezávislých událostí:

  událost a = co padne na první minci,
  událost b = co padne na druhé minci.

- Tyto události jsou zpravidla matematicky modelovány pomocí náhodných veličin, což vede k pojmu *nezávislosti náhodných veličin*, potažmo pak k pojmu nezávislosti σ-algeber.

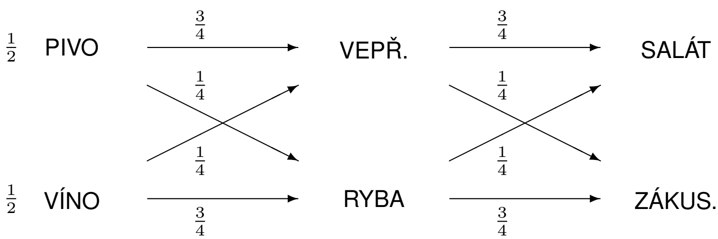
Intuitivní smysl pojmu PN je podobný, ale navíc tu máme podmiňující jevy, respektive podmiňující náhodné veličiny.

Příklad. Jdu na oběd do restaurace a zajímají mne tři události v časovém sledu:

a ... co si objednám k pití (na výběr je PIVO a VÍNO)
c ... co si objednám k hlavnímu jídlu (na výběr je VEPŘOVÁ a RYBA)
b ... co si objednám jako dezert (na výběr je SALÁT a ZÁKUSEK)

Jsem chorobně nerozhodný, a proto používám jako pomůcku při rozhodování házení mincí. V případě první události a si hodím jednoduše mincí. V případě druhé události c se ale domnívám, že vepřová se hodí víc k pivu a ryba víc k vínu. Ale nejsem si zcela jist, tak si opět pomůžu házením mincí, tentokráte dvou. Rozhodovací algoritmus bude následující. V případě, že mám objednáno pivo a nepadne

2× orel, zvolím vepřovou, padne-li 2× orel, zvolím rybu. Podobně, jestliže mám objednáno víno a nepadne 2× orel, zvolím rybu, padne-li 2× orel, zvolím vepřovou. Co se týče třetí události b, zvolím analogický postup. Domnívám se, že vepřová je tučná a není vhodné ji doplnit sladkým kalorickým zákuskem, ale spíše salátem s obsahem vitamínů. Naopak ryba je zdravá, málo kalorická a chybějící kalorie je vhodné doplnit zákuskem. Pro konkrétní rozhodnutí si opět hodím dvěma mincemi. Celkové pravděpodobnosti vypadají následovně:



Z popisu situace je patrné, že v okamžiku, kdy dojídám hlavní jídlo, tedy znám výsledek události c, je rozhodnutí o události b nezávislé na tom, jak dopadla událost a. To právě vystihuje situaci, kdy *události a a b jsou podmíněně nezávislé dáno hodnotami události c.*

Tento příklad rovněž ilustruje intuitivní rozdíl mezi podmíněnou a nepodmíněnou nezávislostí událostí. Vskutku, pozorujeme vyšší korelaci mezi pivem a salátem, respektive mezi vínem a zákuskem:

$$\begin{array}{lll}
(\text{PIVO}, \text{SALÁT}) & \left.\begin{array}{lll} (\text{PIVO}, \text{VEPŘ.}, \text{SALÁT}) & \to & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{32} \\ (\text{PIVO}, \text{RYBA}, \text{SALÁT}) & \to & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32} \end{array}\right\} & \to \ \frac{10}{32}, \\
(\text{PIVO}, \text{ZÁKUS.}) & \left.\begin{array}{lll} (\text{PIVO}, \text{VEPŘ.}, \text{ZÁKUS.}) & \to & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32} \\ (\text{PIVO}, \text{RYBA}, \text{ZÁKUS.}) & \to & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{32} \end{array}\right\} & \to \ \frac{6}{32}, \\
(\text{VÍNO}, \text{SALÁT}) & \left.\begin{array}{lll} (\text{VÍNO}, \text{VEPŘ.}, \text{SALÁT}) & \to & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{32} \\ (\text{VÍNO}, \text{RYBA}, \text{SALÁT}) & \to & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32} \end{array}\right\} & \to \ \frac{6}{32}, \\
(\text{VÍNO}, \text{ZÁKUS.}) & \left.\begin{array}{lll} (\text{VÍNO}, \text{VEPŘ.}, \text{ZÁKUS.}) & \to & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32} \\ (\text{VÍNO}, \text{RYBA}, \text{ZÁKUS.}) & \to & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{32} \end{array}\right\} & \to \ \frac{10}{32}.
\end{array}$$

Intuitivní smysl pojmu PN je tedy následující: *při znalosti hodnot podmiňující veličiny c se hodnoty uvažovaných veličin a a b navzájem neovlivňují.* Pro formální zápis takové situace budeme používat symbol $a \perp\!\!\!\perp b \,|\, c$.

- Matematicky bychom to mohli vyjádřit schematicky v termínech podmíněných hustot:

  $$p(a, b|c) = p(a|c) \cdot p(b|c)\,.$$

  Je jistě nutné přesněji specifikovat, co je to podmíněná hustota, což bude učiněno v dalším textu; pro zde uvažovaný elementární diskrétní případ konkrétně v oddíle § 1.1. V tomto motivačním úvodu však podrobnosti záměrně vynechávám.

- Podstatné je, že PN lze chápat jakožto *kvalitativní pojem*, vystihující určité vztahy mezi náhodnými veličinami.
- Jiná možná interpretace vztahu PN souvisí s pojmem *faktorizace* (sdružené) hustoty. Ekvivalentně lze PN událostí a a b za podmínky události c formulovat coby požadavek, že hustota (v zde uvažovaném diskrétním případě se jedná o hustotu vůči aritmetické míře, někdy též nazývané čítací míra) se faktorizuje na dvě složky, přičemž jedna z nich závisí na událostech a a c, zatímco druhá na událostech b a c:
$$p(a,b,c) = f(a,c) \cdot g(b,c)\,.$$
- To má následující význam. Abychom v diskrétním případě uchovali v paměti počítače třírozměrnou hustotu, stačí uchovat dva dvourozměrné potenciály (= paměťová pole pro hodnoty f a g), což *šetří paměťové nároky.*

Kde se vyskytuje pojem PN

Je několik oblastí matematiky, v kterých narazíme na pojem PN. Vyskytuje se například v teorii pravděpodobnosti, konkrétně, v náhodných procesech. Například markovské procesy jsou definovány s pomocí tohoto pojmu. V tomto motivačním úvodu ale zmíním jiné tři oblasti, v nichž PN hraje podstatnou a důležitou roli. Jedná se:

- o teorii kontingenčních tabulek,
- o mnohorozměrnou statistickou analýzu,
- o pravděpodobnostní expertní systémy.

Dodávám, že PN coby kvalitativní pojem charakterizující vztahy mezi veličinami se rovněž vyskytuje *mimo oblast teorie pravděpodobnosti a statistiky.* Jako takový našel uplatnění v nejrůznějších kalkulech pro popis znalostí a nejistoty v umělé inteligenci.

Kontingenční tabulky

- Jedná se o oblast diskrétní statistiky, která se zabývá *kategoriálními daty.*
- Nástin uvažované situace:

  N ... neprázdná konečná množina *klasifikačních kritérií*,
  $\forall\, i \in N \;\; \mathsf{X}_i$ ... neprázdná konečná množina *úrovní klasifikace.*
- Data jsou posloupnosti objektů roztříděných do příslušných *buněk*, tj. prvků kartézského součinu $\prod_{i\in N} \mathsf{X}_i \equiv \mathsf{X}_N$.

  Konvence (značení). Je-li $x \in \mathsf{X}_N, A \subseteq N$, pak symbol x_A označuje restrikci či projekci x na $\mathsf{X}_A \equiv \prod_{i\in A} \mathsf{X}_i$.

- Na základě dat se sestaví tabulka četností, či též *kontingenční tabulka*, formálně zobrazení, které každé buňce $x \in \mathsf{X}_N$ přiřadí počet objektů $n(x)$ zařazených do této buňky.

- Statistici většinou data považují za náhodný výběr z rozdělení, které je určeno hustotou p vůči aritmetické míře na X_N a hledají nějaký model pro vysvětlení výskytu dat.
- Oblíbenou třídou modelů jsou takzvané *log-lineární modely*. Předpokládá se, že teoretická hustota p je striktně kladná. Potom ji lze zlogaritmovat a za určitých standardizačních konvencí napsat jednoznačný rozklad

$$\ln p(x) = \sum_{A \subseteq N} \lambda_A(x_A) \quad \text{pro} \quad x \in \mathsf{X}_N \,,$$

  kde nezáporné funkce λ_A se nazývají *interakce*. Tato terminologie patrně pochází ze statistické fyziky.
- Jednotlivé konkrétní log-lineární modely se určí požadavkem, že některé interakce se nutně nulují. U třídy *hierarchických log-lineárních modelů* je soubor těch interakcí, které se nemusí nutně nulovat, určen dědičným systémem podmnožin N. (Dědičným systém je takový, že s množinou obsahuje její podmnožiny.) To jest, nulují se interakce vyšších řadů.
- Nejpopulárnější třídou modelů jsou *grafické log-lineární modely*, tj. hierarchické log-lineární modely, u nichž soubor ne nutně se nulujících interakcí odpovídá systému úplných množin nějakého neorientovaného grafu s množinou uzlů N. (Čtenář neobeznámený s těmito grafickými pojmy nalezne příslušné definice v elektronickém dodatku, § B.5.)
- Tímto způsobem každý neorientovaný graf určuje nějaký *statistický model* vysvětlující data, tj. nějakou množinu pravděpodobnostních rozdělení na X_N vymezenou specifickým požadavkem. Podstatné je, že grafické log-lineární modely lze chápat jako statistické *modely struktur PN*. To značí, že každý takový statistický model může být ekvivalentně zaveden jako třída striktně kladných pravděpodobnostních rozdělení na X_N, které vyhovují určitým vztahům PN. Nicméně, v tomto motivačním přehledu nepůjdu do detailů.

Mnohorozměrná statistická analýza

- Jedná se o oblast statistiky, která se zabývá vztahy mezi spojitými náhodnými veličinami, zpravidla gaussovskými.
- Pro popis vztahů mezi veličinami se používají tzv. *modely strukturálních rovnic*, anglicky *structural equation models* (*SEM*). Jsou to systémy funkcionálních vztahů mezi náhodnými veličinami, zpravidla lineárních. Typicky každá veličina je vyjádřena pomocí ostatních a své vlastní chybové náhodné veličiny.
- Patrně nejjednodušší třídou modelů v této oblasti jsou tzv. *rekurzivní modely*, které lze popsat s pomocí acyklických orientovaných grafů. Takový rekurzivní model je zadán přibližně následovně.

  Jsou zadány chybové veličiny $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, které jsou navzájem nezávislé, gaussovské s nulovou střední hodnotou a nenulovými rozptyly $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Uvažujeme systém rovnic

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \varepsilon_1\,,\\
&x_2 = \alpha_{2.1}\cdot x_1 + \varepsilon_2\,,\\
&\ldots\\
&x_k = \alpha_{k.1}\cdot x_1 + \ldots + \alpha_{k.k-1}\cdot x_{k-1} + \varepsilon_k\,,\\
&\ldots\\
&x_n = \alpha_{n.1}\cdot x_1 + \ldots\ldots + \alpha_{n.n-1}\cdot x_{n-1} + \varepsilon_n\,,
\end{aligned}
$$

kde ovšem některé z koeficientů $\alpha_{k.i}$ mohou být vynechány. Pak, pro libovolnou fixní volbu zbylých (= nevynechaných) koeficientů, hodnoty chybových veličin jednoznačně určují hodnoty složek náhodného vektoru $[x_1,\ldots,x_n]$ coby řešení tohoto systému rovnic.

- Získaný náhodný vektor má regulární gaussovské rozdělení. Třídu všech těchto rozdělení, parametrizovaných oněmi nenulovými rozptyly $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ a „nevynechanými“ koeficienty $\alpha_{k.i}$, lze chápat jako *statistický model.*
- Opět, podstatné je pozorování, že tuto třídu rozdělení lze charakterizovat s pomocí pojmu PN. To jest, lze ji chápat jako *statistický model struktury PN*, v tomto případě jako třídu regulárních gaussovských rozdělení, které vyhovují určitým vztahům PN.
- Také v této situaci hrají důležitou pomocnou úlohu grafy. Každému rekurzivnímu systému rovnic lze přiřadit nějaký acyklický orientovaný graf. Uzly grafu odpovídají náhodným veličinám, můžeme je tedy ztotožnit s již uspořádanými indexy $1,\ldots,n$. Do k-tého uzlu nakreslíme šipku z i-tého předchozího uzlu právě tehdy, jestliže koeficient $\alpha_{k.i}$ není v systému rovnic vynechán:

$$i\to k \quad\Leftrightarrow\quad [\,i<k \;\;\&\;\; \alpha_{k.i}\neq 0\,]\,.$$

- Výše zmíněné vztahy PN (určující onen statistický model coby model stuktury PN) lze pak detekovat s pomocí jistého grafického kritéria na základě tohoto acyklického orientovaného grafu. Jedná se o určitou verzi „usměrněného“ separačního kritéria.

Pravděpodobnostní expertní systémy

- Jedná se o oblast oboru umělé inteligence, v níž se rozhodování za nejistoty děje na základě matematických modelů založených na teorii pravděpodobnosti.
- Nástin uvažované situace:

  N ... neprázdná konečná množina *faktorů* (symptomů či rozhodnutí),
  $\forall i\in N$ X_i ... neprázdná konečná *množina hodnot* i-tého faktoru.
- Lidští experti mohou popisovat své znalosti o vztazích mezi jednotlivými faktory ve formě zvláštních implikací, nazývaných *odvozovací pravidla.*

Příklad. Buďte $x_i\in\mathsf{X}_i$, $i=1,2,3$, konkrétní hodnoty faktorů. Takové odvozovací pravidlo může mít třeba následující tvar:

$$\texttt{JESTLIŽE}\;\; X_1 = x_1 \,\&\, X_2 = x_2,\;\; \texttt{PAK}\;\; X_3 = x_3.$$

- Výše popsaná situace je typická pro expertní systémy pracující bez nejistoty. Takový expertní systém je počítačový program, který na základě vstupní informace ve formě souhrnu odvozovacích pravidel má najít odpověď na dotaz, co lze vyvodit, pokud nám někdo zadá určité konkrétní hodnoty faktorů. Je jasné, že v expertních systémech pracujících bez nejistoty se využívají přístupy známé z matematické logiky = automatické odvozování.
- V expertních systémech pracujících s nejistotou je ale bezpodmíněčná platnost odvozovacích pravidel zpochybněna a každé takové pravidlo je ohodnoceno nějakou vahou, což je číslo mezi 0 a 1.

Příklad. `JESTLIŽE` $X_1 = x_1 \,\&\, X_2 = x_2,$ `PAK` $X_3 = x_3$ `S VAHOU` $0.8\,.$

- V pravděpodobnostních přístupech je pak toto číslo interpretováno jako hodnota podmíněné hustoty:

Příklad. $p(X_3 = x_3 \,|\, X_1 = x_1 \,\&\, X_2 = x_2) = 0.8\,.$

- V umělé inteligenci jsou ovšem i jiné, nepravděpodobnostní přístupy, při kterých je váha interpretována jinak. Alternativní přístupy se více věnují technické otázce, jak při odvozování kombinovat zadané váhy s pomocí algebraických operací. Nicméně v obou případech je konečným cílem „vypočítat“ váhy jednotlivých hodnot nějakého faktoru, který nás zajímá.
- V pravděpodobnostním expertním systému je tedy *souborem vstupních kvantitativních znalostí* množina zadaných „málorozměrných“ podmíněných pravděpodobností. Při opravdu důsledně pravděpodobnostním přístupu si přirozeně musíme klást otázku *konzistence vstupních znalostí*, tj. zda existuje „mnohorozměrné“ pravděpodobnostní rozdělení na X_N takové, že z něho vypočítané podmíněné pravděpodobnosti se shodují se zadanými. Tato otázka má dosti úzkou souvislost s tzv. *marginálním problémem*.

  Marginálním problémem se v tomto kontextu rozumí otázka, zda pro zadaný systém „méněrozměrných“ marginál existuje pravděpodobnostní rozdělení mající ony zadané marginály.
- Nicméně, v praktických situacích je konzistence zpravidla zajištěna anebo ji lze zajistit nějakou modifikací. Vážnějším problémem je, podle kterého kritéria vybrat nejvhodnější mnohorozměrné pravděpodobnostní rozdělení na X_N a jak je pak reprezentovat v paměti počítače. Toto rozdělení by mělo představovat *globální znalost* pravděpodobnostního expertního systému.
- Ještě důležitější otázka z praktického hlediska je pak *jak* se zvoleným rozdělením *provádět výpočty*.

Příklad. Připomeňme, že v případě 100 binárních veličin obecně mnohorozměrné rozdělení vyžaduje v paměti $2^{100} - 1$ míst a výpočet pětirozměrné marginály 2^{95} sčítacích operací.

- Stojíme tedy před komplexním problémem: výběrem mnohorozměrného rozdělení, které by bylo v souladu se vstupními kvantitativními znalostmi a přitom efektivně uchovatelné v paměti počítače. A tady se právě ukazuje *důležitost pojmu PN.*

- Protože PN je interpretována (viz str. 4-5) jako jistý kvalitativní vztah mezi náhodnými veličinami, totiž že při znalosti podmiňující hodnoty se již podmíněně nezávislé veličiny neovlivňují, *je často oprávněné přijmout předpoklad, že mezi veličinami platí nějaké vztahy PN.*
- Druhá interpretace PN, která byla zmíněna (na straně 5), totiž ta s pomocí pojmu *faktorizace* hustoty, potom může oprávnit předpoklad, že příslušné mnohorozměrné rozdělení lze vyjádřit jako kombinaci svých málorozměrných marginál (či obecněji málorozměrných potenciálů). Tyto málorozměrné marginály jsou snadno uchovatelné v paměti počítače.
- Konečně, v případě, že přijatý model struktury PN je dostatečně vhodný (což nastává v případě tzv. *rozložitelných modelů*), lze požadované výpočty málorozměrných podmíněných pravděpodobností provádět velmi efektivně.
- Taková metoda výpočtu, kdy se počítá jen s jistými málorozměrnými potenciály, které ovšem dohromady reprezentují mnohorozměrné rozdělení, se nazývá *metoda lokálních výpočtů* (anglicky *local computation method*). Právě tato metoda vlastně umožnila existenci pravděpodobnostních expertních systémů. Jinak by totiž požadované výpočty nebyly vůbec proveditelné.

Přehledová příloha – literatura o PN a tematické konference

V elektronické příloze, viz kapitola A doplňkového textu na webovské adrese

`http://staff.utia.cas.cz/studeny/skriptaSPN.html` ,

čtenář nalezne (subjektivně) komentovaný přehled literatury o PN a grafických modelech i informace o výzkumných skupinách a tematicky blízkých konferencích.

Přehled elementárních pojmů

V elektronické příloze, viz kapitola B doplňkového textu na webovské adrese

`http://staff.utia.cas.cz/studeny/skriptaSPN.html` ,

jsou pak zopakovány ty základní matematické pojmy a pozorování, jejichž znalost se u čtenáře skript víceméně předpokládá. Studentům MFF UK by povětšinou měly být známy, ale skripta jsou zamýšlena i jako doplňkový učební text pro studenty jiných vysokých škol, kteří s těmito matematickými pojmy nemusí být obeznámeni.