

Předmluva

Tato publikace je určena jako učební text k dvousemestrální přednášce *Základy nelineární fyziky a synenergetiky* konané oběma autory na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Přednáška je určena v prvé řadě posluchačům oboru biofyzika a chemická fyzika, dále též oboru optika a optoelektronika. Vhodná je rovněž pro posluchače oboru teoretická fyzika, případně i matematické modelování. Může však posloužit i zájemcům z oblastí mimo fyziku. Podmínkou je pouze znalost diferenciálního a integrálního počtu a základů teorie diferenciálních rovnic.

Obsah knihy pokrývá přibližně látku odpřednášenou během zimního semestru. Účelem je seznámit posluchače s nejdůležitějšími pojmy vystupujícími při studiu nelineárních dynamických soustav a ukázat na některé z metod, které se při řešení problémů spjatých s dynamikou nelineárních soustav používají. Z tohoto důvodu uvádíme v seznamu literatury pouze nejdůležitější díla, ve kterých čtenář nalezne odkazy na původní práce. Časové omezení přednášky se projevilo v nutnosti omezeného výběru látky. Přestože škála jevů v nelineární fyzice je mnohem bohatší než v obvykle používané lineární aproximaci, autoři se byli nuceni omezit pouze na problematiku nelineárních oscilátorů. Důvodem byla nejen ta skutečnost, že jde pravděpodobně o historicky nejstarší studovanou oblast nelineární dynamiky, ale i to, že porovnání s lineárními oscilátory, které jsou čtenářům fyzikálních oborů důvěrně známé, umožní ukázat, jak výskyt nelinearity modifikuje jejich dynamiku.

Problematika nelineárních soustav s nekonečným počtem stupňů volnosti (nelineární vlny, solitony, autovlny a další) vyžaduje samostatnou značně rozsáhlejší publikaci. Totéž platí i o deterministickém chaosu a samoorganizaci.

Autoři by uvítali, kdyby tato knížka vyvolala zájem čtenářů o nelineární problematiku, která v poslední době nabývá stále většího uplatnění v řadě vědeckých i technických oblastí.

Na závěr bychom chtěli poděkovat Mgr. Zdeňkovi Morávkovi za pečlivé provedení obrázků a Mgr. Pavle Fialové za korekturu a jazykovou úpravu textu.

V Praze dne 1. listopadu 2002

Jíří Fiala, Lubomír Skála

Kapitola 1

Úvod

1.1 Historický přehled

Pohlédneme-li zběžně na historii vytváření kvantitativního obrazu světa, zjistíme, že na počátku převažovalo studium nejvýznamnějších a nejstabilnějších částí — z mechanických úloh byly například řešeny problémy statiky.

Na počátku současného rozvoje fyziky stálo studium dynamických problémů, matematicky zformulované Isaacem Newtonem. Zde se již naráželo na rozmanitost a složitost fyzikální problematiky na dynamické úrovni. Je zajímavé, že fundamentální úlohy mechaniky – Keplerova úloha v mechanice částic a Eulerova úloha v dynamice kontinua – vedou k typicky nelineárním problémům. Tyto soustavy také vykazují typické rysy nelineárního chování. Jmenujme alespoň existenci periodických orbit s velkým počtem harmonik, závislost periody oběhu na amplitudě pohybu a nepředpověditelnost dlouhodobého dynamického chování při libovolně malé vnější poruše.

Z matematického hlediska jsou obecné rovnice většinou neintegrabilní. To vede ke snaze využít poruchových teorií, což představuje pokus popsat nelineární interakce pomocí lineárních rovnic. V tomto případě se však vždy jedná o přibližné metody omezené na slabé nelinearity.

Matematické potíže při popisu nelineárních soustav vedly k formulaci linearizovaných dynamických modelů, vyžadující však apriorní předpoklad slabých polí a malých poruch.

Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno výše, se zájem fyziků přesouval na úspěšnější lineární teorie, jako jsou Maxwellova teorie elektromagnetického pole a kvantová mechanika, která je rovněž lineární teorií.

Lineární teorie mají při řešení nesporné výhody. Je možno využít platnosti principu superpozice, který umožňuje aplikaci odpovídajících matematických metod při popisu nejvýznačnějších rysů dynamického obrazu světa. Kromě jiného platí i ekvipartiční teorém, zajišťující rovnoměrnou distribuci excitací ve studovaném dynamickém systému. Lineární přístup však představuje určitou aproximaci popisu soustavy, která obecně nemusí být splněna. Toto se začalo výrazněji projevovat od počátku XX. století, kdy došlo k výraznému nárůstu aktuálních nelineárních problémů.

Jejich doménou byla vedle fyziky plazmatu také nelineární akustika a optika. Problémy nelineární fyziky se objevily také ve fyzice pevných látek, radiotechnice a s ní spjaté nelineární radiofyzice. V klasické oblasti nelinearit — hydrodynamice — byl studován vznik a vývoj turbulence. Nelineární problémy se vyskytovaly ve statistické fyzice, nevyhnuły se obecné relativitě a kosmologii a s tím spjaté problematice vývoje vesmíru a astrofyziky. Dále jmenujme namátkou alespoň unitární teorii pole a otázky kreace a anihilace nelineárních částic.

Tyto a další nelineární problémy byly však z matematického hlediska specifické pro každou individuální problematiku. Důsledkem toho byl nárůst významu nelineární matematiky jako nástroje popisu nelineárních procesů v přírodě.

Základem nelineární dynamiky byl vznik teorie nelineárních oscilací. Ten se datuje do 20. a 30. let XX. století a je neodmyslitelně spjat se jmény van der Pola, Mandelštama a Andronova.

Období do poloviny 60. let XX. století je charakterizováno vybudováním a postupným rozvojem kvazilineární fyziky. Ta se stala typickým přístupem k řešení nelineárních problémů. Tento přístup spočívá ve využití osvědčených postupů lineární fyziky, kdy se nelinearity započítávají jako malé opravy nebo pomalu se měnící parametry.

Typickým, patrně nejznámějším příkladem této metody je teorie kvaziharmonického elektrického oscilátoru, vypracovaná van der Polem. Dále využil této metody anglický fyzik R. Peierls k vypracování teorie přenosu tepla v krystalické mřížce. Reprezentujeme-li krystalickou mřížku souborem vázaných harmonických oscilátorů, můžeme její kmitový stav popsat normálními mody, tzv. fonony. Tento model však nepopíše tepelnou vodivost. Proto Peierls popsal krystalickou mřížku jako soubor nelineárních oscilátorů. Analogické postupy byly využity i v případě soustav s nekonečným počtem stupňů volnosti.

V současné době se nelineární dynamika věnuje převážně teorii silně

nelineárních soustav. Výchozím bodem je teorie silně nelineárních oscilací, která má svůj počátek již v pracích H. Poincarého a která byla dále rozvíjena Andronovem. V případě silně nelineárních soustav je nezbytné zformulovat jejich globální popis; jejich analýzu nelze omezit na okolí rovnovážných lineárních stavů.

1.2 Stručná charakteristika kvazilineární fyziky

Jak již bylo řečeno, kvazilineární přístup znamenal důležitou etapu vývoje nelineární fyziky, která neztratila svůj význam ani v současné době. Proto je vhodné podat alespoň stručnou charakteristiku této metody.

Kvazilineární fyzika vyšla ze zkušeností získaných na základě nelineárních oscilací. Její rovnice jsou obvykle formulovány pro parametry slabě interagujících lineárních excitací nebo modů. Nelinearita je zde chápána jako malá porucha lineárního chování nebo jako pomalu se měnící parametr. Důsledkem toho je, že nedochází ke kvalitativní změně hlavní části řešení, ale k malým změnám parametrů reprezentujících dynamické módy. Přitom obvykle pouze jeden z vlastních modů dává příspěvek k nárůstu vyvolaném rezonancí. To je výchozím bodem velmi důležité van der Polovy-Bogoljubovovy-Krylovovy metody řešení kvazilineárních rovnic.

Vedle úspěšného využití postupů kvazilineární fyziky v případě studia diskrétních soustav (s konečným počtem stupňů volnosti), jako byl již výše zmíněný van der Polův oscilátor nebo Peierlsova teorie tepelné vodivosti, se tento přístup osvědčil i při popisu spojitě rozložených soustav (tj. s nekonečným počtem stupňů volnosti). Jmenujme alespoň otázku generace vyšších harmonických v nelineární optice, generaci koherentního záření v laseru a popis samofokuse, fázové konjugace, vznik nestabilit a evoluci chování plazmatu, nelineární Landauův útlum a zesílení či problém slabých turbulencí ať již v hydrodynamice či v plazmatu.

Závěrem lze snad říci, že hlavní význam, který má pro nelineární fyziku kvazilineární přístup, spočívá v možnosti vytváření nových, jednoduchých dynamických modelů jako důsledku zavedení nelinearit.

1.3 Stručná charakteristika nelineární dynamiky jako teorie silně nelineárních jevů

Přejdeme-li k dynamice silně nelineárních soustav, pak pro jejich popis již kvazilineární přístup nestačí.

V posledních 30-ti letech byly řešeny silně nelineární problémy spjaté s rovnicemi obecné teorie relativity, unitární teorie pole, astrofyzikou a vývojem vesmíru, hydrodynamikou vzniku turbulence, anihilací a kreací částic a problematikou složitých struktur.

V současné době jsou nejaktuálnější problémy nelineární dynamiky:

- Vznik dynamického deterministického chaosu, při kterém se studuje stochastické chování soustav a vznik podivných atraktorů.
- Vznik a evoluce samoorganizovaných struktur ve složitých nelineárních otevřených soustavách, které se nacházejí ve stavu vzdáleném od termodynamické rovnováhy. V nejobecnější rovině se těmito otázkami zabývá nová vědní disciplína, zvaná synergetika.

K nejvýznamnějším soustavám, ve kterých se vyskytují samoorganizované struktury patří atmosféra. Studium prostorově časových struktur v atmosféře souvisí s problematikou předpovědi počasí. Složité struktury se objevují též v plazmatu při jeho zahřívání. Živé soustavy vykazují vznik časových nebo prostorově časových samoorganizovaných struktur na nejrůznějších hierarchických úrovních. Tyto problémy se objevují i ve spojitosti s unitární teorií pole a evoluční teorií.

Jak jsme se již dříve zmínili, vyžadují soustavy se silnou nelinearitou, na rozdíl od soustav popsatelných kvazilineárním přístupem, globální popis. To se stalo impulzem pro rozvoj nelineární matematiky, obecně teorie nelineárních rovnic. Nejvýznamnější výsledky matematických výzkumů v této oblasti byly učiněny v rozvoji teorie solitonů a teorie podivných atraktorů.

Konstatovali jsme, že počátkem rozvoje dynamiky silně nelineárních soustav bylo zkoumání silně nelineárních oscilací. Později se ukázaly některé analogie mezi silně nelineárními oscilacemi a silně nelineárními vlnami. Šlo o analogie mezi časovými pulzacemi oscilací a prostorovými pulzacemi nelineárních vln, dále o podobnost mezi oscilacemi a vlnami s prostorovou strukturou interagujícími v čase a konečně analogie mezi procesy interakcí v soustavě vázaných oscilátorů a nestacionárních vlnových procesů.

Zásadním problémem však zůstává, do jaké míry je možno porovnávat soustavy s nekonečným počtem stupňů volnosti (tj. spojitě soustavy) se soustavami s konečným počtem stupňů volnosti. Tato otázka však není dosud uspokojivě objasněna.

Určité pochopení přineslo jednak studium soustav se silnou nelinearitou a slabou disperzí, jednak soustav se slabou nelinearitou a silnou disperzí.

Obecně lze říci, že nelinearity vedou k deformaci tvaru vlny a k jejímu narušení. To nelze objasnit s pomocí modelu s konečným počtem stupňů volnosti; nejúspěšnějším způsobem popisu se zatím jeví využití tzv. spektrální reprezentace.

V případě bezdisperzního prostředí jsou i slabé harmoniky generované nelinearitami v rezonanci se základní vlnou, takže dochází k její efektivní excitaci. V důsledku toho může popis procesu vyžadovat započtení nekonečného počtu harmonik.

Je-li prostředí silně disperzní a vyznačuje se slabou nelinearitou, přispívá k synchronizaci (tj. prostorové a časové rezonanci) výrazným způsobem pouze málo frekvencí. V tomto případě je pak možná analogie s oscilujícími systémy s malým počtem stupňů volnosti.

Závěrem je snad vhodné uvést několik slov o tom, jaký je současný přístup k problematice nelineární dynamiky. Lze říci, že v současných metodách studia se kombinují výrazně analytické metody a kvalitativní teorie s numerickými experimenty a modelováním.

Zůstává stále v platnosti Mandelstammův přístup k nelineárním jevům, kde na jedné straně jde o pochopení jednotlivých rysů rozmanitých odlišných jevů pozorováním společných vlastností s omezenou přesností a jejich kombinací a na druhé straně o studium specifické individuality jednotlivých jevů.

1.4 Nelineární věda — zobecnění nelineární fyziky

Nelineární fyzika se zabývá studiem nelineárních fyzikálních soustav. Nelineární věda se zajímá o obecné dynamické nelineární soustavy. Pojem dynamické soustavy vznikl zobecněním pojmu mechanické soustavy. Modelování jejího pohybu diferenciálními rovnicemi zavedl Isaac Newton. Newton zformuloval dynamiku soustavy nebeských těles jako důsledek gravitačního zákona. Tato metoda byla úspěšně rozvíjena dalšími generacemi vědců a vedla k formulaci evolučních rovnic. Jejich řešení bylo však často nemožné vyjádřit v natolik jednoduchém algebraickém tvaru, který by umožňoval názorné zobrazení chování těchto mechanických soustav.

Zobecněním tohoto přístupu na jiné soustavy než fyzikální — např. chemické, biologické, ekonomické, sociologické — dospíváme k zavedení pojmu dynamické soustavy jako matematického modelu určité reálné soustavy.

Způsoby modelování reálných systémů mohou být ovšem velmi rozmanité. Vedle již zmíněných diferenciálních rovnic se používají i funkce, algebra, markovovské řetězce a podobně.

Nelineární věda se tedy obecně zabývá studiem nelineárních dynamických soustav. Nelinearita v soustavě, tj. skutečnost, že odezva soustavy není úměrná určitému vstupnímu signálu, vede obecně k následujícím důsledkům:

- V matematickém popisu soustavy je narušen princip superpozice. To má za následek nepoužitelnost Fourierovy transformace při řešení evolučních rovnic. V důsledku toho neexistuje jednoduchá systematická metoda řešení nelineárních rovnic.
- Nelineární soustavy se dále vyznačují citlivostí na počáteční podmínky, kde jejich malá změna může vést ke značně odlišnému budoucímu chování soustavy. Tato skutečnost vede k problému deterministického chaosu.

V řadě případů neznáme řešení rovnic pro popis nelineárních soustav. Potom je možné pouze přímo simulovat nelineární popis pomocí počítačů.

Nelineární věda je typicky interdisciplinární obor. Základní teorie a principy nelineárních soustav jsou použitelné ve všech vědních oborech. Proto lze nelineární vědu považovat za nové vědecké odvětví přinášející soubor zásadně nových idejí a překvapujících výsledků. Je vytvářena velikou řadou badatelů v poměrně dlouhém časovém období, které trvá dodnes.

Je třeba vzít v úvahu, že nelinearity se vyskytují v soustavách libovolných rozměrů a pohybujících se libovolným prostředím. Proto je lze na rozdíl od mikrosvěta či relativistických soustav studovat běžnými prostředky. Proto se také tento vstup do nelineárního světa nazývá klidná revoluce v současné vědě.

1.5 Některé hlavní oblasti nelineární vědy

Nelinearita v soustavě představuje společného jmenovatele následujících oblastí spadajících do nelineární vědy.

1.5.1 Fraktály

Fraktály nazýváme prostorové struktury vznikající v přírodě samoskupením velkého počtu identických složek a vyznačující se samopodobností, tj.

tím, že části soustavy se v různé stupnici měřítek podobají celku (invariance prostorového měřítka). Z fyzikálního hlediska jsou fraktály, které můžeme pozorovat v řadě soustav, jak přírodních tak i společenských, důsledkem principu samoorganizace při působení zákona prostorové interakce daného obecně nelineární rovnicí.

1.5.2 Deterministický chaos

Deterministický chaos je důsledkem citlivosti chování nelineárních soustav na malé změny počátečních podmínek. Důsledkem toho je, že predikce chování soustavy je možná pouze v krátkém časovém intervalu; pro delší časové intervaly se soustava chová náhodně. Toto chování se vyskytuje i u soustav s malým počtem stupňů volnosti. Nejde tedy ani o kvaziperiodický pohyb s mnoha periodami ani o náhodný (statistický) pohyb ve velice složitých soustavách.

Typickým znakem chaosu, jehož vznik je vždy podmíněn existencí nelinearity v soustavě, je existence podivného atraktoru ve fázovém prostoru nelineární disipativní soustavy. Tyto podivné atraktory, stejně tak jako jejich bazény (tj. oblasti, ze kterých fázové trajektorie končí v atraktoru), mají velmi často fraktální charakter.

Deterministický chaos má význam například při krátkodobých předpovědích počasí nebo sledování krátkodobých pohybů cen na burze.

Někdy se v podivném atraktoru vyskytují nestabilní periodické orbity, které je však možno malou poruchou stabilizovat. Pak hovoříme o tzv. řízeném chaosu, kterého využíváme například při řízení mechanických soustav nebo v elektronických systémech; vyskytuje se i v laserech, chemických soustavách či srdečních tkáních.

Historie studia chaotického pohybu je poměrně dlouhá. James Clerck Maxwell studoval chaotický pohyb molekul modelovaných tuhými koulemi. Chaotickým pohybem ve speciálním případě soustavy tří těles s gravitační interakcí se zabýval Henri Poincaré. Od roku 1960 se studiem chaotického pohybu zabývaly skupiny matematiků v Moskvě a Berkeley. Intenzity nabylo zkoumání chaotického pohybu od roku 1975. V současné době se deterministický chaos zkoumá jak experimentálně, tak na počítačových modelech. Lze říci, že deterministický chaos byl pozorován ve všech oblastech vědy. Hlavní snahou při jeho studiu je nalezení společné ideje matematického zkoumání a výsledků získaných v přírodních vědách. Problémem, na kterém se pracuje, je vytváření vhodných modelů fyzikálních, biologických či sociálních systémů vykazujících chaotické chování.

1.5.3 Vznik a vytváření struktur

V posledních 15 letech byla věnována intenzivní pozornost též studiu struktur, které vznikají jak v přírodních, tak ve společenských systémech. Hlavními modely vzniku struktur jsou nestability vzniklé v homogenním prostředí a dále pak agregace a difuzní růst.

1.5.4 Solitony

Solitony jsou prostorově lokalizované vlny, které se šíří konstantní rychlostí a zachovávají neměnný tvar jak během šíření, tak i po srážce s jiným solitonem.

Fyzikální podstatou solitonu je kompenzace rozplývání vlnového klubka, která je způsobena disperzí, zúžením způsobeným nelinearitou. Solitony se vyskytují v uzavřených systémech a jejich popis je vázán na integritu rovnic popisujících soustavu.

1.5.5 Buněčné automaty

Automatem zde nazýváme diskrétní dynamickou soustavu, jejíž stav se vyvíjí dle zadaných místních pravidel. Množinu identických automatů s konečným počtem diskrétních stavů umístěných v buňkách regulárních mřížek nazýváme *buněčným automatem*. V něm závisí stav automatu v dané buňce na stavech automatů v buňkách sousedních.

Význam buněčných automatů spočívá v tom, že v důsledku diskrétnosti všech veličin je možné přesné modelování celkového stavu buněčného automatu a jeho evoluce s pomocí počítačů.

Již v roce 1940 se Johann von Neumann pokusil využít buněčného automatu ke zjištění možnosti existence samoreprodukujících se počítačů. V roce 1970 John Conway navrhl jednoduchý dvojrozměrný buněčný automat, který se nazývá "model populace" (game of life), protože je schopen vytvářet útvary podobné živým strukturám.

V současné době se buněčných automatů s hexagonální mřížkou využívá k simulaci Navierových-Stokesových rovnic (Urcel Frisch, Brost Hasslacker, Yves Pomeau, 1986). Tato možnost je důsledkem platnosti zákonů zachování a necitlivosti rovnic na mikroskopické detaily.

Dalším možným využitím buněčných automatů je studium proudění kapalin porézními prostředím a simulace řady procesů ve fyzikálních, chemických a biologických soustavách. Model buněčného automatu posloužil

k pokusům o vytvoření koncepce studia umělého života na základě “model populace”.

1.5.6 Složité soustavy

Složité soustavy se vyskytují téměř ve všech oblastech, které jsou středem zájmu současného výzkumu, ať již jde o problematiku původu života, otázky evoluční biologie, ekonomie, psychologie či samoorganizace v nerovnovážných soustavách. Přesto dosud neexistuje přesná definice složité soustavy.

Důvodem pro to, že se vytvořila samostatná vědní disciplína, která se zabývá teorií složitých a obecně nelineárních soustav, je jednak úspěch teorie deterministického chaosu ukazující možnost společné analýzy jak v přírodních, tak i společenských vědách, jednak dostupnost výpočetní techniky pro simulace a počítačové experimenty při popisu složitých soustav.

Jak jsme viděli, metody nelineární vědy se uplatňují při studiu soustav nejrůznějšího původu, od fyzikálních, chemických přes biologické až ke společenským soustavám a soustavám uměle vytvořeným lidskou činností (ekonomickým, finančním či technickým).

Proto je jedním z hlavních důsledků vzniku nelineární vědy ukázání možnosti postupného návratu k jednotě vědy, rozdělené stále rostoucí specializací na jednotlivé disciplíny.