

Kapitola 1

Úvod

1.1 Historický přehled

Pohlédneme-li zběžně na historii vytváření kvantitativního obrazu světa, zjistíme, že na počátku převažovalo studium nejvýznamnějších a nejstabilnějších částí — z mechanických úloh byly například řešeny problémy statiky.

Na počátku současného rozvoje fyziky stálo studium dynamických problémů, matematicky zformulované Isaacem Newtonem. Zde se již naráželo na rozmanitost a složitost fyzikální problematiky na dynamické úrovni. Je zajímavé, že fundamentální úlohy mechaniky – Keplerova úloha v mechanice částic a Eulerova úloha v dynamice kontinua – vedou k typicky nelineárním problémům. Tyto soustavy také vykazují typické rysy nelineárního chování. Jmenujme alespoň existenci periodických orbit s velkým počtem harmonik, závislost periody oběhu na amplitudě pohybu a nepředpověditelnost dlouhodobého dynamického chování při libovolně malé vnější poruše.

Z matematického hlediska jsou obecné rovnice většinou neintegrabilní. To vede ke snaze využít poruchových teorií, což představuje pokus popsat nelineární interakce pomocí lineárních rovnic. V tomto případě se však vždy jedná o přibližné metody omezené na slabé nelinearity.

Matematické potíže při popisu nelineárních soustav vedly k formulaci linearizovaných dynamických modelů, vyžadující však apriorní předpoklad slabých polí a malých poruch.

Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno výše, se zájem fyziků přesouval na úspěšnější lineární teorie, jako jsou Maxwellova teorie elektromagnetického pole a kvantová mechanika, která je rovněž lineární teorií.

Lineární teorie mají při řešení nesporné výhody. Je možno využít platnosti principu superpozice, který umožňuje aplikaci odpovídajících matematických metod při popisu nejvýznačnějších rysů dynamického obrazu světa. Kromě jiného platí i ekvipartiční teorém, zajišťující rovnoměrnou distribuci excitací ve studovaném dynamickém systému. Lineární přístup však představuje určitou aproximaci popisu soustavy, která obecně nemusí být splněna. Toto se začalo výrazněji projevovat od počátku XX. století, kdy došlo k výraznému nárůstu aktuálních nelineárních problémů.

Jejich doménou byla vedle fyziky plazmatu také nelineární akustika a optika. Problémy nelineární fyziky se objevily také ve fyzice pevných látek, radiotechnice a s ní spjaté nelineární radiofyzice. V klasické oblasti nelinearit — hydrodynamice — byl studován vznik a vývoj turbulence. Nelineární problémy se vyskytovaly ve statistické fyzice, nevyhnuły se obecné relativitě a kosmologii a s tím spjaté problematice vývoje vesmíru a astrofyziky. Dále jmenujme namátkou alespoň unitární teorii pole a otázky kreace a anihilace nelineárních částic.

Tyto a další nelineární problémy byly však z matematického hlediska specifické pro každou individuální problematiku. Důsledkem toho byl nárůst významu nelineární matematiky jako nástroje popisu nelineárních procesů v přírodě.

Základem nelineární dynamiky byl vznik teorie nelineárních oscilací. Ten se datuje do 20. a 30. let XX. století a je neodmyslitelně spjat se jmény van der Pola, Mandelštama a Andronova.

Období do poloviny 60. let XX. století je charakterizováno vybudováním a postupným rozvojem kvazilineární fyziky. Ta se stala typickým přístupem k řešení nelineárních problémů. Tento přístup spočívá ve využití osvědčených postupů lineární fyziky, kdy se nelinearity započítávají jako malé opravy nebo pomalu se měnící parametry.

Typickým, patrně nejznámějším příkladem této metody je teorie kvaziharmonického elektrického oscilátoru, vypracovaná van der Polem. Dále využil této metody anglický fyzik R. Peierls k vypracování teorie přenosu tepla v krystalické mřížce. Reprezentujeme-li krystalickou mřížku souborem vázaných harmonických oscilátorů, můžeme její kmitový stav popsat normálními mody, tzv. fonony. Tento model však nepopíše tepelnou vodivost. Proto Peierls popsal krystalickou mřížku jako soubor nelineárních oscilátorů. Analogické postupy byly využity i v případě soustav s nekonečným počtem stupňů volnosti.

V současné době se nelineární dynamika věnuje převážně teorii silně

nelineárních soustav. Výchozím bodem je teorie silně nelineárních oscilací, která má svůj počátek již v pracích H. Poincarého a která byla dále rozvíjena Andronovem. V případě silně nelineárních soustav je nezbytné zformulovat jejich globální popis; jejich analýzu nelze omezit na okolí rovnovážných lineárních stavů.

1.2 Stručná charakteristika kvazilineární fyziky

Jak již bylo řečeno, kvazilineární přístup znamenal důležitou etapu vývoje nelineární fyziky, která neztratila svůj význam ani v současné době. Proto je vhodné podat alespoň stručnou charakteristiku této metody.

Kvazilineární fyzika vyšla ze zkušeností získaných na základě nelineárních oscilací. Její rovnice jsou obvykle formulovány pro parametry slabě interagujících lineárních excitací nebo modů. Nelinearita je zde chápána jako malá porucha lineárního chování nebo jako pomalu se měnící parametr. Důsledkem toho je, že nedochází ke kvalitativní změně hlavní části řešení, ale k malým změnám parametrů reprezentujících dynamické módy. Přitom obvykle pouze jeden z vlastních modů dává příspěvek k nárůstu vyvolaném rezonancí. To je výchozím bodem velmi důležité van der Polovy-Bogoljubovovy-Krylovovy metody řešení kvazilineárních rovnic.

Vedle úspěšného využití postupů kvazilineární fyziky v případě studia diskrétních soustav (s konečným počtem stupňů volnosti), jako byl již výše zmíněný van der Polův oscilátor nebo Peierlsova teorie tepelné vodivosti, se tento přístup osvědčil i při popisu spojitě rozložených soustav (tj. s nekonečným počtem stupňů volnosti). Jmenujme alespoň otázku generace vyšších harmonických v nelineární optice, generaci koherentního záření v laseru a popis samofokuse, fázové konjugace, vznik nestabilit a evoluci chování plazmatu, nelineární Landauův útlum a zesílení či problém slabých turbulencí ať již v hydrodynamice či v plazmatu.

Závěrem lze snad říci, že hlavní význam, který má pro nelineární fyziku kvazilineární přístup, spočívá v možnosti vytváření nových, jednoduchých dynamických modelů jako důsledku zavedení nelinearit.

1.3 Stručná charakteristika nelineární dynamiky jako teorie silně nelineárních jevů

Přejdeme-li k dynamice silně nelineárních soustav, pak pro jejich popis již kvazilineární přístup nestačí.

V posledních 30-ti letech byly řešeny silně nelineární problémy spjaté s rovnicemi obecné teorie relativity, unitární teorie pole, astrofyzikou a vývojem vesmíru, hydrodynamikou vzniku turbulence, anihilací a kreací částic a problematikou složitých struktur.

V současné době jsou nejaktuálnější problémy nelineární dynamiky:

- Vznik dynamického deterministického chaosu, při kterém se studuje stochastické chování soustav a vznik podivných atraktorů.
- Vznik a evoluce samoorganizovaných struktur ve složitých nelineárních otevřených soustavách, které se nacházejí ve stavu vzdáleném od termodynamické rovnováhy. V nejobecnější rovině se těmito otázkami zabývá nová vědní disciplína, zvaná synergetika.

K nejvýznamnějším soustavám, ve kterých se vyskytují samoorganizované struktury patří atmosféra. Studium prostorově časových struktur v atmosféře souvisí s problematikou předpovědi počasí. Složité struktury se objevují též v plazmatu při jeho zahřívání. Živé soustavy vykazují vznik časových nebo prostorově časových samoorganizovaných struktur na nejrůznějších hierarchických úrovních. Tyto problémy se objevují i ve spojitosti s unitární teorií pole a evoluční teorií.

Jak jsme se již dříve zmínili, vyžadují soustavy se silnou nelinearitou, na rozdíl od soustav popsatelných kvazilineárním přístupem, globální popis. To se stalo impulzem pro rozvoj nelineární matematiky, obecně teorie nelineárních rovnic. Nejvýznamnější výsledky matematických výzkumů v této oblasti byly učiněny v rozvoji teorie solitonů a teorie podivných atraktorů.

Konstatovali jsme, že počátkem rozvoje dynamiky silně nelineárních soustav bylo zkoumání silně nelineárních oscilací. Později se ukázaly některé analogie mezi silně nelineárními oscilacemi a silně nelineárními vlnami. Šlo o analogie mezi časovými pulzacemi oscilací a prostorovými pulzacemi nelineárních vln, dále o podobnost mezi oscilacemi a vlnami s prostorovou strukturou interagujícími v čase a konečně analogie mezi procesy interakcí v soustavě vázaných oscilátorů a nestacionárních vlnových procesů.

Zásadním problémem však zůstává, do jaké míry je možno porovnávat soustavy s nekonečným počtem stupňů volnosti (tj. spojitě soustavy) se soustavami s konečným počtem stupňů volnosti. Tato otázka však není dosud uspokojivě objasněna.

Určité pochopení přineslo jednak studium soustav se silnou nelinearitou a slabou disperzí, jednak soustav se slabou nelinearitou a silnou disperzí.

Obecně lze říci, že nelinearity vedou k deformaci tvaru vlny a k jejímu narušení. To nelze objasnit s pomocí modelu s konečným počtem stupňů volnosti; nejúspěšnějším způsobem popisu se zatím jeví využití tzv. spektrální reprezentace.

V případě bezdisperzního prostředí jsou i slabé harmoniky generované nelinearitami v rezonanci se základní vlnou, takže dochází k její efektivní excitaci. V důsledku toho může popis procesu vyžadovat započtení nekonečného počtu harmonik.

Je-li prostředí silně disperzní a vyznačuje se slabou nelinearitou, přispívá k synchronizaci (tj. prostorové a časové rezonanci) výrazným způsobem pouze málo frekvencí. V tomto případě je pak možná analogie s oscilujícími systémy s malým počtem stupňů volnosti.

Závěrem je snad vhodné uvést několik slov o tom, jaký je současný přístup k problematice nelineární dynamiky. Lze říci, že v současných metodách studia se kombinují výrazně analytické metody a kvalitativní teorie s numerickými experimenty a modelováním.

Zůstává stále v platnosti Mandelstammův přístup k nelineárním jevům, kde na jedné straně jde o pochopení jednotlivých rysů rozmanitých odlišných jevů pozorováním společných vlastností s omezenou přesností a jejich kombinací a na druhé straně o studium specifické individuality jednotlivých jevů.

1.4 Nelineární věda — zobecnění nelineární fyziky

Nelineární fyzika se zabývá studiem nelineárních fyzikálních soustav. Nelineární věda se zajímá o obecné dynamické nelineární soustavy. Pojem dynamické soustavy vznikl zobecněním pojmu mechanické soustavy. Modelování jejího pohybu diferenciálními rovnicemi zavedl Isaac Newton. Newton zformuloval dynamiku soustavy nebeských těles jako důsledek gravitačního zákona. Tato metoda byla úspěšně rozvíjena dalšími generacemi vědců a vedla k formulaci evolučních rovnic. Jejich řešení bylo však často nemožné vyjádřit v natolik jednoduchém algebraickém tvaru, který by umožňoval názorné zobrazení chování těchto mechanických soustav.

Zobecněním tohoto přístupu na jiné soustavy než fyzikální — např. chemické, biologické, ekonomické, sociologické — dospíváme k zavedení pojmu dynamické soustavy jako matematického modelu určité reálné soustavy.