Kapitola 5

Modelové dynamické soustavy se dvěma stavovými proměnnými

V předchozí kapitole jsme studovali vlastnosti některých nelineárních dynamických soustav na základě úvah, které však byly často spíše kvalitativního rázu. Chceme-li vyjádřit závislosti mezi veličinami, které charakterizují dynamiku soustavy kvantitativně, musíme znát řešení nelineárních evolučních rovnic přesně nebo alespoň přibližně. Viděli jsme, že v případě Duffingova oscilátoru a matematického kyvadla lze přesné řešení zapsat pomocí poměrně složitých speciálních funkcí, kterými byly eliptické funkce.

Řadu důležitých vlastností nelineárních oscilujících soustav však lze demonstrovat pomocí dynamických soustav, které mají tu vlastnost, že přesná řešení jejich evolučních rovnic lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Ukazuje se, že v případě soustav se dvěma stavovými proměnnými $q_1(t)$ a $q_2(t)$ je vhodné zavést jedinou komplexní stavovou proměnnou $\psi(t)$ definovanou vztahem

$$\psi(t) = q_1(t) + iq_2(t).$$

Evoluční rovnice se pak redukují na jednu komplexní rovnici

$$\dot{\psi}(t) = \dot{q}_1(t) + i\dot{q}_2(t) = N_1(q_1, q_2) + iN_2(q_1, q_2),$$

kde $\mathbf{N}(q_1, q_2) = (N_1(q_1, q_2), N_2(q_1, q_2))$ je vektor toku fázové kapaliny uvažované dynamické soustavy.

Abychom ukázali, jak lze tyto modely konstruovat, zvolíme nejprve lineární konzervativní modelovou dynamickou soustavu odpovídající lineárnímu harmonickému oscilátoru.

5.1 Komplexní evoluční rovnice harmonického oscilátoru

Při vyšetřování lineárního harmonického oscilátoru jsme pro vektor toku fázové kapaliny používali výraz $\mathbf{N}(q_1, q_2) = (q_2, -\omega_0^2 q_1)$, kde stavová proměnná q_1 odpovídala souřadnici oscilátoru a $q_2 \equiv \dot{q}_1$ jeho hybnosti (uvažovali jsme jednotkovou hmotnost).

Pro naši modelovou soustavu zvolíme symetričtější tvar tohoto vektoru ve tvaru

$$\mathbf{N}(q_1, q_2, \omega_0) = (\omega_0 q_2, -\omega_0 q_1).$$

Komplexní evoluční rovnici nalezneme snadno, neboť

$$\dot{\psi}(t) = \omega_0 q_2(t) - i\omega_0 q_1(t) = -i\omega_0(q_1(t) + iq_2(t)).$$

Můžeme tedy evoluční rovnici napsat ve tvaru

$$i\dot{\psi}(t) = \omega_0 \psi(t). \tag{5.1}$$

že tato evoluční rovnice skutečně odpovídá lineárnímu oscilátoru, ověříme snadno, rozepíšeme-li tuto evoluční rovnici pro obě stavové proměnné

$$\dot{q}_1 = \omega_0 q_2,$$

$$\dot{q}_2 = -\omega_0 q_1.$$

Odtud vyplývá pohybová rovnice lineárního harmonického oscilátoru

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0.$$

První integrál této rovnice, vyjadřující energii oscilátoru H, je roven

$$H = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 q_1^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2(q_1^2 + q_2^2),$$

což lze zapsat také ve tvaru

$$H = \frac{1}{2}\omega_0^2 |\psi(t)|^2.$$

Při tomto způsobu zápisu můžeme komplexní funkce $\psi^*(t)$ a $\psi(t)$ chápat jako klasickou analogii kreačních a anihilačních operátorů kvant excitace, které se vyskytují v kvantové mechanice. Potom čtverec modulu funkce $\psi(t)$

$$N = \psi^*(t)\psi(t)$$

lze chápat jako míru excitace oscilátoru (v kvantové mechanice tomu odpovídá operátor počtu částic). V důsledku konzervativnosti harmonického oscilátoru nezávisí N na čase.

Modelovou soustavu často definujeme tak, že postulujeme její lagrangián L. Ten souvisí v klasické mechanice s hamiltoniánem H vztahem

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - H.$$

V našem případě vystupují jako proměnné v lagrangiánu komplexní funkce $\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*$. V případě nedisipativní soustavy požadujeme reálnost lagrangiánu a rovněž jeho symetrii vzhledem k záměně ψ a ψ^*, resp. $\dot{\psi}$ a $\dot{\psi}^*$. Tyto podmínky splňuje lagrangián, který volíme ve tvaru

$$L(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*) = i\frac{\omega_0}{4}(\dot{\psi}\psi^* - \psi\dot{\psi}^*) - \frac{1}{2}\omega_0^2|\psi|^2.$$

Lagrangeova rovnice, ve které vystupuje tento lagrangián,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} = 0,$$

pak skutečně odpovídá lineárnímu oscilátoru, protože

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} = -i\frac{\omega_0}{4}\psi$$

a

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^*} = i\frac{\omega_0}{4}\dot{\psi} - \frac{\omega_0^2}{2}\psi.$$

Odtud dostáváme Lagrangeovu rovnici ve tvaru

$$-\frac{\omega_0}{2}(i\dot{\psi} - \omega_0\psi) = 0,$$

cože vede k evoluční rovnici (5.1).

Porovnáme-li zvolený lagrangián s klasickou Lagrangeovou funkcí, můžeme říci, že výrazu $\sum(\partial L/\partial\dot{q})\dot{q}$ odpovídá člen $(i/4)\omega_0(\dot{\psi}\psi^* - \psi\dot{\psi}^*)$ a H pak odpovídá $(1/2)\omega_0^2|\psi|^2$, což je skutečně energie lineárního oscilátoru.

Poznamenejme ještě, že Lagrangeova funkce je definována až na libovolný součinitel. Ten neovlivňuje tvar pohybové rovnice, mění však výraz pro energii soustavy. Kdybychom například zvolili Lagrangeovu funkci $\tilde{L} = (2/\omega_0)L$, dostali bychom renormalizovaný výraz pro energii $\tilde{H} = \omega_0|\psi|^2$, což se v některých případech též používá.

Popis soustavy pomocí komplexní stavové proměnné a příslušné evoluční rovnice umožňuje snadno zjistit základní rysy dynamiky studované soustavy. Zapíšeme-li komplexní stavovou proměnnou v exponenciálním tvaru

$$\psi(t) = a(t)\exp[i\varphi(t)],$$

kde $a(t)$ a $\varphi(t)$ jsou reálné funkce, přejde evoluční rovnice na tvar

$$i\dot{a}(t) - a(t)\dot{\varphi}(t) = \omega_0 a(t).$$

Rozdělením na reálnou a imaginární část dostaneme

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0,$$

$$\dot{a}(t) = 0,$$

z čehož plyne

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0,$$

$$a(t) = konst \equiv \sqrt{N}.$$

Velikost konstanty v poslední rovnici je důsledkem vztahu $N = \psi^*\psi$. Řešení evoluční rovnice

$$\psi(t) = \sqrt{N}\exp[i(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

nám říká, že dynamická soustava vykonává periodický pohyb s konstantní amplitudou $\sqrt{N}$ a konstantní úhlovou frekvencí ω_0.

5.2 Nelineární nedisipativní oscilátor

Při hledání komplexní evoluční rovnice pro nelineární oscilátor bez disipace energie můžeme vyjít z lagrangiánu oscilátoru, v němž odpovídající energii soustavy doplníme členem vyššího řádu v komplexní proměnné ψ.

Abychom zachovali symetrii soustavy, přidáme další sudou mocninu $|\psi|$, takže budeme lagrangián předpokládat ve tvaru

$$L(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*) = \frac{i\omega_0}{4}(\dot{\psi}\psi^* - \psi\dot{\psi}^*) - \frac{\omega_0^2}{2}|\psi|^2 + \frac{\alpha}{2}|\psi|^4,$$

kde $\alpha > 0$.

Zde opět vidíme, že $\partial L/\partial(\dot{\psi}^*) = -i(\omega_0/4)\psi$, takže $d/dt[\partial L/(\partial\dot{\psi}^*)] = -i(\omega_0/4)\dot{\psi}$ a dále $\partial L/\partial\psi^* = i(\omega_0/4)\dot{\psi} - (\omega_0^2/2)\psi + \alpha|\psi|^2\psi$. Dosazením do Lagrangeovy rovnice pak dostaneme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}^*} - \frac{\partial L}{\partial\psi^*} = \frac{\omega_0}{2}\left[-i\dot{\psi} + (\omega_0 - \frac{2\alpha}{\omega_0}|\psi|^2)\psi\right] = 0.$$

Označíme-li $\beta = (2\alpha)/\omega_0 > 0$, dostaneme komplexní evoluční rovnici pro nelineární oscilující dynamickou soustavu v obecném tvaru

$$i\dot{\psi} = (\omega_0 - \beta|\psi|^2)\psi, \quad \beta > 0. \tag{5.2}$$

Energie této dynamické soustavy, která zde opět reprezentuje první integrál, tj. veličinu, která se zachovává, je rovna

$$H = \frac{1}{2}\omega_0^2|\psi|^2 - \frac{\alpha}{2}|\psi|^4 = \frac{1}{2}(\omega_0^2 - \alpha N)N.$$

Charakter dynamiky této soustavy opět snadno nahlédneme, vyjádříme-li opět komplexní stavovou proměnnou v komplexním tvaru

$$\psi(t) = a(t)\exp[i\varphi(t)]$$

s reálnými funkcemi $a(t)$ a $\varphi(t)$. Dosazením do evoluční rovnice (5.2) dostaneme

$$i\dot{a}(t) - a(t)\dot{\varphi}(t) = (\omega_0 - \beta a^2(t))a(t),$$

což vede k rovnicím

$$\dot{a} = 0,$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - \beta a^2.$$

Amplituda kmitu a zde zůstává opět konstantní, přičemž

$$a = \sqrt{N},$$

funkce $\varphi(t)$ je lineární funkcí času

$$\varphi(t) = (\omega_0 - \beta N)t + \varphi_0,$$