4. PRINCIP MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

Pro odhad parametrů rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny se obvykle používá tzv. „princip maximální věrohodnosti“ (maximum likelihood). Zde se nejprve zavádí tzv. věrohodnostní funkce náhodné veličiny, která je úměrná pravděpodobnosti realizované hodnoty v případě diskrétní náhodné veličiny, nebo hustotě pravděpodobnosti v případě veličin spojitých. Věrohodnostní funkce se chápe jako závislá na hodnotách neznámých parametrů rozdělení. Podle principu maximální věrohodnosti se pak vyberou ty hodnoty parametrů příslušných rozdělení pravděpodobnosti nebo hustot pravděpodobnosti, pro které jsou pravděpodobnosti nebo hustoty pravděpodobnosti realizované hodnoty největší. Dále ukážeme, jak tento zdánlivě jednoduchý princip dovolí odhadnout parametry rozdělení pravděpodobnosti měřených náhodných veličin a charakterizovat tak nejistotu výsledků měření.

4.1 ODHAD PARAMETRŮ ROZDĚLENÍ Z JEDINÉHO EXPERIMENTU

Hlavním přínosem principu maximální věrohodnosti je možnost formulovat s jeho využitím početní postupy pro nalezení odhadů parametrů příslušných rozdělení pravděpodobnosti. Jako příklad uveďme postup pro odhad parametru binomického rozdělení, kterým je hodnota p pravděpodobnosti realizace jevu (viz definici v odst. 3.1). Při jediném experimentu nechť se jev o neznámé pravděpodobnosti p (při N nezávislých pokusech) realizoval k'-krát. Pravděpodobnost tohoto výsledku $P_{p,N}(k')$ je dána vztahem (3.8). Nyní však pro odhad parametru p chápeme tuto pravděpodobnost jako funkci proměnné p

$$P_{N,k'}(p) = \binom{N}{k'} p^{k'} (1 - p)^{N-k'} \tag{4.1}$$

a podle principu maximální věrohodnosti hledáme hodnotu $\tilde{p}$, pro niž je pravděpodobnost (4.1.) maximální. Nutnou podmínkou pro maximum je

$$\left(\frac{dP_{N,k'}(p)}{dp} \right)_{\tilde{p}} = 0 \ .$$

Potom vypočítáme

$$\left(\frac{dP_{N,k'}(p)}{dp} \right)_{\tilde{p}} = \binom{N}{k'} k' \tilde{p}^{k'-1} (1-\tilde{p})^{N-k'} - (N-k') \binom{N}{k'} \tilde{p}^{k'} (1-\tilde{p})^{N-k'-1} = 0$$

a dále

$$\tilde{p} = \frac{k'}{N} \ . \tag{4.2}$$

Vzhledem k tomu, že odhady nalezené podle principu maximální věrohodnosti jsou opět náhodné veličiny, má smysl se ptát po jejich střední hodnotě a disperzi. V případě binomického rozdělení je střední hodnota odhadu (4.2) (s využitím výsledku seminární úlohy 3.4)

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{1}{N} \langle k' \rangle = \frac{Np}{N} = p \ . \tag{4.3}$$

Pokud je tedy střední hodnota odhadu rovna střední (očekávané) hodnotě náhodné veličiny, hovoříme o <u>odhadu nevychýleném</u>.

Pro disperzi odhadu parametru binomického rozdělení $\tilde{p}$ podle (4.2) máme (srovnej (3.60))

$$D_{\tilde{p}} = \left(\frac{1}{N} \right)^2 D_{k'} \ , \tag{4.4}$$

kde $D_{k'}$ je disperze náhodné veličiny popsané binomickým rozdělením.

Užitím výsledků seminární úlohy 3.4 a odhadu (4.2) je možno dále odhadnout střední hodnotu a disperzi diskrétní náhodné veličiny k popsané binomickým rozdělením. Pro střední hodnotu máme

$$\mu_k \equiv \langle k \rangle = Np \quad \rightarrow \quad \tilde{\mu}_k = N\tilde{p} = k' \ . \tag{4.5}$$

Podobně pro disperzi

$$D_k = Np(1 - p) \;\rightarrow\; \tilde{D}_k = \frac{k'(N - k')}{N} \;. \tag{4.6}$$

Dále je zřejmě (viz (4.3))

$$\langle \tilde{\mu}_k \rangle = N \langle \tilde{p} \rangle = Np = k$$

a odhad střední hodnoty (4.5) je tedy nevychýlený. Na druhé straně je možno ukázat (viz sem. úloha 4.1), že

$$\left\langle \tilde{D}_k \right\rangle = \frac{N - 1}{N} D_k \tag{4.7}$$

a odhad disperze je naopak odhadem vychýleným.

U rozdělení Poissonova získáme uvedeným postupem odhad parametru rozdělení μ ve tvaru

$$\tilde{\mu} = k' \;, \tag{4.8}$$

kde k' je opět v jediném experimentu konkrétně realizovaná hodnota proměnné k .

Podobně jako odhad parametru binomického rozdělení (4.2) je i odhad (4.8) odhadem nevychýleným, protože jednoduše platí (též s využitím seminární úlohy 3.6)

$$\left\langle \tilde{\mu} \right\rangle = \left\langle k' \right\rangle = \mu \;\;. \tag{4.9}$$

Střední hodnotu a disperzi náhodné veličiny popsané Poissonovým rozdělením odhadneme s užitím výsledků seminární práce 3.6

$$\left\langle k \right\rangle \equiv \mu_k = \mu \;\rightarrow\; \tilde{\mu}_k = \tilde{\mu} = k' \;,$$

$$D_k \equiv \sigma_k^2 = \mu \;\rightarrow\; \tilde{D}_k \equiv \tilde{\sigma}_k^2 = \tilde{\mu} = k' \,. \tag{4.10}$$

Střední hodnoty obou odhadů jsou triviálně rovny hodnotám správným a oba odhady jsou tedy v tomto případě nevychýlené.

Dále ukážeme, jak je možné odhady založené na realizaci jediné (i když nejpravděpodobnější) hodnoty náhodné veličiny významně upřesnit, protože v některých případech se tyto odhady standardně používají. Příkladem mohou být měření v jaderné fyzice. Často se zde registrují počty událostí (jaderných rozpadů) popsaných diskrétním Poissonovým rozdělením, v závislosti na různých externích parametrech. Pokud jsou parametry experimentu časově dostatečně stabilní, je možno časový interval „nabírání statistiky" prodloužit, a zaznamenávat v jediném experimentu vysoké hodnoty k'. Uvážíme-li, že relativní nejistota odhadu je:

$$\tilde{\eta}_k = \frac{\tilde{\sigma}_k}{\tilde{\mu}_k} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \quad ,$$

je možno již při registraci hodnot k' řádu 10^6 dosáhnout relativní nejistoty měřené hodnoty řádu 0,1 %.

4.2 OPAKOVANÉ NEZÁVISLÉ EXPERIMENTY

Obecně používanou možností zlepšení kvality odhadu je využití výsledků opakovaných nezávislých experimentů (realizací náhodné proměnné).

Uvažujme nejprve diskrétní náhodnou veličinu k s binomickým rozdělením pravděpodobnosti. Opakujeme-li n-krát nezávisle „binomický experiment", získáme n-tici hodnot k_i (i = 1, 2, …, n). Pravděpodobnost nalezení takové n-tice hodnot je dána vztahem

$$P_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(p) = \prod_{i=1}^{n} P_{k_i, N}(p) =$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} k_i} (1 - p)^{\sum_{i=1}^{n} (N - k_i)} \prod_{i=1}^{n} \binom{N}{k_i} . \qquad (4.11)$$

Pravděpodobnost je opět závislá na p a jejího maxima, podle požadavku principu maximální věrohodnosti, je dosaženo je-li

$$\left(\frac{dP_{k_1,k_2,\dots,k_n}(p)}{dp} \right)_{\tilde{p}} = 0 \ .$$

Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$(1-\tilde{p})\sum_{i=1}^{n} k_i = \tilde{p}\sum_{i=1}^{n}(N-k_i)$$

a konečně

$$\tilde{p} \ = \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{N} \ . \qquad (4.12)$$

Nový odhad je tedy aritmetickým průměrem odhadů typu (4.2) a jeho střední hodnota

$$\langle \tilde{p} \rangle \ = \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle k_i \rangle}{N} \ = \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{N\,p}{N} \ = \ p$$

je rovna správné hodnotě parametru a odhad je tedy odhadem nevychýleným. Disperze odhadu je podle (3.60)

$$D_{\tilde{p}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{N}\right)^2 D_{k_i} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}\right)^2 D_{k'} \qquad (4.13)$$

a je tedy podle očekávání n-krát menší než disperze odhadu z jediného experimentu (4.4).

Střední hodnotu a disperzi náhodné veličiny odhadneme v tomto případě s využitím (4.12) vztahy

$$\mu_k \equiv \langle k \rangle \ = \ Np \quad \rightarrow \quad \tilde{\mu}_k = N\tilde{p} = N\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{N} \ = \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

$$D_k \ = \ N\,p\,(1-p) \quad \rightarrow \quad \tilde{D}_k \ = \ N\,\tilde{p}\,(1-\tilde{p}) \ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i (1 - \frac{1}{N}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i) \ .$$

Ve srovnání s odhadem disperze náhodné veličiny z jediného experimentu (viz (4.6)) je vidět, že výsledek jediného měření k' je zde nahrazen aritmetickým průměrem výsledků n-krát nezávisle opakovaných experimentů. Je možno snadno ukázat, že odhad střední hodnoty náhodné veličiny je nevychýlený, zatímco střední hodnota odhadu disperze (viz sem. úloha 4.2)