Úvod:
příklady z historie

Úvod

Je užitečné si ještě dříve přečíst předmluvu. Nejprve si všimneme prostřednictvím vybraných ukázek toho, co předcházelo korektním definicím některých matematických pojmů a jak se vyvíjely představy o reálných číslech, o limitě posloupnosti apod. Matematické pojmy jsou často předmětem mnohem složitějšího vývoje, než je při jejich studiu na první pohled zřejmé. Některé relativně složité poznatky jsou známy velmi dlouho, jiné, i když se nám jeví jako velmi jednoduché, se však objevily mnohem později, nežli bychom očekávali. Výběr ukázek je dán osobním vkusem; rozhodně by bylo chybou se domnívat, že jde o nejzávažnější momenty vývoje matematiky.

Historie matematiky je dlouhá asi čtyři tisíce let a sahá hluboko před začátek našeho letopočtu; přitom pomíjíme zcela dobu dřívější, z níž se nám žádné písemné památky nezachovaly. Již před začátkem našeho letopočtu zvládali matematici relativně velmi složité výpočty, které souvisely např. s určením délky roku, s kalendářem, s určováním obsahů jednoduchých rovinných obrazců, se sledováním nebeských těles, s vyměřováním daní z pozemků atp. Některé poznatky z nejstarších písemných matematických památek udivují svou poměrně velkou numerickou přesností, avšak postrádají jakékoli náznaky metod, které byly k řešení použity; každá úloha byla řešena nezávisle na ostatních, zpravidla beze známek toho, že by si tehdejší počtáři nějaké souvislosti mezi nimi uvědomovali. U těchto úloh pak můžeme početní postupy rekonstruovat jen velmi obtížně na základě analogií, vlastních zkušeností a dobré víry, že to tak nějak podobně mohlo být.

Poznámka. Nejstaršími a patrně i nejznámějšími matematickými písemnostmi jsou egyptské papyry, které se někdy nazývají londýnský a moskevský. Londýnský zakoupil skotský sběratel Henry Rhind v r. 1858; někdy se též uvádí, že papyrus byl opsán písařem Ahmesem asi r. 1650 před n. l. z pramenů patrně o 200 – 400 let starších. Tento papyrus obsahuje 85 řešených problémů a je rozdělen do tří tématických částí, které postupně obsahují aritmetické úlohy, výpočty obsahů a objemů a problémy hospodářského rázu z praktického života. Je z něj zřejmé, že Egypťané zvládali aritmetické operace s přirozenými čísly. Sčítání a odčítání bylo díky lepšímu zápisu čísel poměrně jednoduché, avšak dělení bylo obtížnější. V papyru se pracuje se zlomky, obsahuje i problém vedoucí na určení součtu konečně mnoha členů geometrické posloupnosti a je v něm řešen i příklad, z něhož lze zpětně určit hodnotu $\pi \sim 3,16049$; viz níže.

V moskevském papyru je 25 úloh, které se částečně shodují s úlohami z londýnského papyru, jsou tam však i tři úlohy na objemy, které jsou zcela originální.

Iracionální čísla

Velmi dlouhý byl vývoj poznatků o iracionálních číslech. Již babylonští matematici znali poměrně přesně hodnotu $\sqrt{2}$ ($1{,}4142129\overline{629}\ldots$ místo $1{,}4142135623\ldots$); ta se vyskytovala v úlohách, které řešili. Neexistuje však žádný náznak toho, že by si uvědomovali nějakou abnormalitu tohoto čísla. Měli dokonce i tabulky druhých a třetích odmocnin.

Konstituování pojmu „iracionálního čísla“ předcházel objev tzv. nesouměřitelnosti veličin; ta byla objevena pythagorejci [1]). Čísly byla pro ně jedině *čísla přirozená*, zlomky v našem smyslu nazývali souměřitelnými veličinami (to byly poměry, ne však čísla, i když se s nimi jako s částmi peněžních jednotek počítalo!); hodnota $\sqrt{2}/2$ byla nesouměřitelným poměrem a v něm vystupující veličiny, tj. 2 a $\sqrt{2}$, se nazývaly nesouměřitelnými. Pythagorejci znali nesouměřitelnost strany a úhlopříčky jednotkového čtverce. Běžně tradovaný důkaz iracionality $\sqrt{2}$, který bývá zpravidla prezentován již na střední škole, pochází v podstatě od Aristotela (384 – 322 před n. l.); ten připisuje starší důkaz metodou dvojího sporu pythagorejcům. Stejným způsobem se lehce dokáže, že $\sqrt{p}$ je iracionální číslo pro každé prvočíslo p [2]).

Po nějakou dobu byla patrně $\sqrt{2}$ jedinou známou veličinou tohoto typu (iracionálním číslem, použijeme-li současné terminologie); je však též možné, že první taková veličina odpovídala číslu $(\sqrt{5}-1)/2$, které souvisí s pojmem tzv. *zlatého řezu*. Pojednává o něm Eukleides (365 – asi 300 před n. l.) v Základech (Kniha 2, Věta 11). Tam je popsána konstrukce rozdělení úsečky na dva díly se speciální vlastností. Označíme-li danou úsečku AB, má se nalézti bod H mezi body A, B tak, aby platilo

$$|AB| \cdot |HB| = |AH|^2 .$$

Odtud plyne

$$|AB| : |AH| = |AH| : |HB| ,$$

neboli, položíme-li $|AB| = a$, $|AH| = x$, musí pro g, $g = a/x$, platit rovnost

$$g = \frac{x}{a-x} , \quad \text{a je tedy} \quad a(a-x) = x^2 .$$

[1]) Pythagoras (asi 585 – asi 500 před n. l.), zakladatel této školy, byl žákem Thalese z Miletu (asi 610 – asi 546 před n. l.). Žádné písemné práce pythagorejců se nezachovaly, a tak jejich výsledky známe zprostředkovaně (odvolávají se na ně např. Herodotos (asi 485 – asi 425 před n. l.) a Platon (427 – 347 před n. l.)).

[2]) Číslo 1 mezi prvočísla nepočítáme.

Odtud jednoduše plyne

$$g^2 = \frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{a-x} + \frac{x}{a-x} = g+1\,,$$

a s ohledem na fakt, že úloze vyhovuje *kladné* řešení rovnice

$$g^2 - g - 1 = 0\,, \tag{1}$$

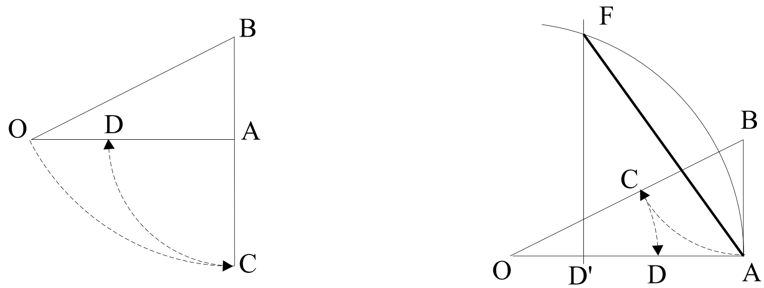
platí $g = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618033\ldots$; se záporným řešením rovnice (1), které je tvaru $g' = (1-\sqrt{5})/2$, se rovněž ještě setkáme. Čísla g a g' jsou zřejmě iracionální.

Již od starověku je pokládán obdélník, jehož strany jsou v poměru $g:1$, za ideálně harmonický kompoziční prvek. Někdy se též pracuje s číslem $g^{-1} = h$, které vyhovuje rovnici $h^2 + h - 1 = 0$ a pro něž platí

$$h = g - 1 = (\sqrt{5}-1)/2 = 0,618033\ldots\,.$$

Vidíme, že platí $h = -g'$. S některými vcelku překvapivými souvislostmi těchto čísel se zdánlivě vzdálenými poznatky se seznámíme později. Na tomto místě pouze připomeneme, že úsečka o délce $h/2$ se objevuje např. při konstrukci pravidelného tětivového pětiúhelníku jednotkové kružnice.

Příklad 1. Na Obr. 1 vlevo je znázorněn postup konstrukce čísla h (g sestrojíme obdobně).



Obr. 1.

Je $|OA| = 1$, $|AB| = 1/2$, $OA \perp AB$. Zřejmě platí $|BO| = \sqrt{5}/2 = |BC|$, a dále $h = |AC| = |AD| = (\sqrt{5}-1)/2$. Konstrukce je v podstatě převzata z Eukleidových *Základů*. Vpravo je znázorněna konstrukce strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného jednotkové kružnici. Je opět $|OA| = 1$, $|AB| = 1/2 = |BC|$. Dále platí $|OC| = |OD| = h$, $|OD'| = h/2$. Oblouk AF je oblouk jednotkové kružnice se středem v počátku, přičemž $FD' \perp OA$; délka $|AF|$ úsečky AF je hledanou délkou strany pětiúhelníku.

Později Theodorus z Kýrény (asi 465 – asi 399 před n. l.) dospěl dále a dokázal nesouměřitelnost $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots, \sqrt{17}$ s jednotkou [3]). Obecnější výsledek obdržel jeho žák Theaetetus (asi 410 – asi 369 před n. l.), který dokázal nesouměřitelnost (iracionalitu) $\sqrt{n}$ pro všechna přirozená n, která nejsou čtverci,

[3]) Jde tedy o odmocniny všech přirozených čísel od 2 do 17 včetně, která nejsou čtverci jiného přirozeného čísla.