Kapitola 6

Elementární funkce

6.1 Úvod: základní vlastnosti funkcí

Až dosud jsme vlastně, až na drobné výjimky, téměř žádné konkrétní funkce nezavedli. Pokusíme se to nyní napravit, nejdříve však některé věci připomeneme.

Poznámka 6.1.1. Dosud jsme pracovali s identitou (Definice 1.4.6), s mocninami s nezáporným celým exponentem a s polynomy (Definice 4.1.9) a s některými dalšími funkcemi (p-tá odmocnina pro $p \in \mathbb{N}$, jednoduchými racionálními funkcemi (viz níže), s Dirichletovou a s Riemannovou funkcí, atp.). Jsou to vesměs funkce algebraické: zhruba řečeno, k jejich definici nepotřebujeme limitní proces. V této kapitole zavedeme mj. další *elementární funkce*, což je sice cosi *přesně nedefinovaného*, nicméně jde o funkce velmi důležité. Některé jejich vlastnosti intuitivně chápeme díky středoškolským poznatkům, ale je ještě mnoho věcí, které o nich nevíme.

Definice 6.1.2. Jestliže pro funkci f a její definiční obor D_f platí

$$(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f) \quad \text{a zároveň} \quad f(-x) = f(x)\,,$$

pak říkáme, že f *je sudá funkce.* Podobně, jestliže pro funkci f a její definiční obor D_f platí

$$(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f) \quad \text{a zároveň} \quad f(-x) = -f(x)\,,$$

pak říkáme, že f *je lichá funkce.*

Definice 6.1.3. Jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že pro funkci f a její definiční obor D_f platí

$$(x \in D_f \Rightarrow x \pm a \in D_f) \quad \text{a zároveň} \quad f(x) = f(x+a) = f(x-a)\,,$$

pak říkáme, že a je *periodou* funkce f. Množinu všech period funkce f označme G_f. Zřejmě vždy platí $0 \in G_f$. Pokud obsahuje G_f více než jeden prvek, je nekonečná, protože

$$f(x) = f(x \pm a) = f(x \pm 2a) = \cdots .$$

Snadno se ukáže, že G_f je množina uzavřená vzhledem ke sčítání i odčítání. Je-li G_f nekonečná, pak říkáme, že f *je periodická funkce.*

Příklad 6.1.4. Je-li f konstantní funkce, je $G_f = \mathbb{R}$. Tento příklad je ovšem triviální.

Příklad 6.1.5. Pokud označíme G_f^+ množinu všech *kladných* period f, platí

$$(\inf G_f^+ = \omega > 0) \Rightarrow \omega \in G_f^+ .$$

To se dokáže sporem: pokud by platilo $\omega \notin G_f^+$, existovala by posloupnost $\{a_n\}$ prvků G_f^+ taková, že $a_n \to \omega$. Tato posloupnost by byla cauchyovská a rozdíly jejích prvků s ohledem na vlastnosti G_f^+ by ležely rovněž v G_f. Existovala by tedy perioda ω_1 taková, pro kterou by platilo $0 < \omega_1 < \omega$, což je hledaný spor.

Definice 6.1.6. Je-li a *nejmenší kladná perioda* funkce f, budeme říkat, že f je *a-periodická funkce.* Někdy se a nazývá *hlavní perioda* funkce f. Předchozí příklad ukazuje, že tato definice je korektní.

Příklad 6.1.7. Riemannova funkce ϱ z Příkladu 4.2.9 je periodická. Snadno nahlédneme, že každé $a \in \mathbb{Z}$ je její periodou a že žádné jiné periody nemá. Je to tedy 1-periodická funkce. Naproti tomu pro Dirichletovu funkci δ z Příkladu 4.1.5 jsou periodami všechna čísla z $\mathbb{Q}$ a tedy δ *nemá* nejmenší kladnou periodu. Obě funkce jsou sudé. Upozorňujeme čtenáře na fakt, že Riemannova funkce, která *má nejmenší kladnou periodu*, je v některých bodech spojitá. Naproti tomu Dirichletova funkce *nemá nejmenší kladnou periodu*, nemá však také žádný bod spojitosti. Tyto zdánlivě málo související věci jsou ve skutečnosti na sobě závislé: *je-li periodická nekonstantní funkce spojitá alespoň v jednom bodě, má nejmenší kladnou periodu.*

Poznámky 6.1.8. 1. Konstantní funkce a také *identita* $\mathrm{Id} : x \mapsto x,\ x \in \mathbb{R}$, jsou funkce spojité na $\mathbb{R}$. Speciální označení pro identitu se většinou neužívá a tak se pracuje s funkcemi x nebo x^2 apod. [1]) Pak ale nemůžeme v některých případech rozlišovat např. mezi funkcí $f(x) = x^2$ a hodnotou této funkce v bodě x. Přesnější označení je naopak těžkopádné, a tak volíme kompromis: mezi funkcí a jejími hodnotami v takovém případě rozlišujeme podle souvislosti. Není to složité, ale vyžaduje to od čtenáře jistou pozornost.

Mocniny x^n s celým nezáporným exponentem n jsme zavedli induktivně; také ony jsou spojitými funkcemi na $\mathbb{R}$; na intervalu $[0, +\infty)$ jsou pro $n \geq 1$ rostoucí a tedy prosté. Mocniny se sudým n jsou sudými funkcemi, mocniny s lichým n jsou liché funkce. Odtud mj. vyplývá, že již nelze „zvětšit interval“ $[0, \infty)$, na němž jsou sudé mocniny (kromě $x^0 \equiv 1$) prosté. Naproti tomu liché mocniny jsou vesměs rostoucí a prosté na celém $\mathbb{R}$.

---

[1]) S označením Id se pracuje např. v učebním textu [3].

2. Příklad 2.4.15 nám umožňuje poměrně brzo zavést odmocniny; slouží k určení jejich definičního oboru. Není proto nutné mít k jejich zavedení hlubší věty o spojitých funkcích (např. Větu 4.3.37). Příklad 2.4.15 ukazuje, že *pro každé* $a > 0$ existuje $\sqrt[n]{a}$. K mocninám s n, $n \geq 1$ definujeme inverzní funkce

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Ty nazýváme n-té odmocniny. Poznamenejme, že někdy se pro lichá n zavádějí n-té odmocniny na celém $\mathbb{R}$. Na úrovni střední školy není vůbec zřejmé, že platí $x^2 : [0, \infty) \overset{\text{na}}{\to} [0, \infty)$, tedy že jde o zobrazení *na*; proto by se to také jako zřejmý fakt nemělo prezentovat. K mocninám a odmocninám se však ještě vrátíme.

3. Pomocí mocnin jsme zavedli polynomy, což jsou opět funkce spojité na $\mathbb{R}$. Exponent nejvyšší mocniny, která se v polynomu vyskytuje s koeficientem $\neq 0$, se nazývá *stupeň polynomu*. Často tímto koeficientem celý polynom dělíme a pracujeme s polynomem, který má u nejvyšší mocniny koeficient 1. Polynom s touto vlastností (budeme říkat, že je v *normálním tvaru*) stupně 1, který nabývá hodnoty 0 v bodě x_1 je jednoznačně určen: je to polynom $P(x) = (x - x_1)$, $x \in \mathbb{R}$. Má-li polynom v normálním tvaru n reálných kořenů a je stupně n, je opět jednoznačně určen. Je to polynom

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Tyto věci považujeme za známé z algebry.

4. Několikrát jsem pracovali i s podíly polynomů. Ty tvoří další důležitou třídu funkcí, kterou zavedeme v následující definici.

Definice 6.1.9. Funkce $R(x) = P(x)/Q(x)$, kde P, Q jsou polynomy v proměnné x a polynom Q není identicky roven 0, se nazývají *funkce racionální*; někdy se užívá i název *racionální lomené funkce*. Nejjednoduššími z nich jsou kromě polynomů (v tom případě je jmenovatel Q nenulový polynom stupně 0) *mocniny s celým záporným exponentem*: $x^{-n} = 1/x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Snadno nahlédneme, že tyto funkce jsou spojité na svém definičním oboru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Všechny racionální funkce jsou spojité ve svém definičním oboru D_R, kterým je komplement množiny nulových bodů (kořenů) jmenovatele Q.

Algebraickými operacemi a eventuálně skládáním funkcí získáme z těchto funkcí funkce složitější. Všechny takové funkce jsou *algebraické* (viz následující Poznámka), my však potřebujeme zavést i některé funkce *transcendentní* (takovou funkcí je např. log; s touto funkcí se čtenář patrně setkal na střední škole), tj. takové, k jejichž definici je nutná nějaká forma limitního přechodu. Limitní přechod může být skryt např. v použití řad, integrálu nebo diferenciálních rovnic. Čím pokročilejší aparát máme k dispozici, tím lze zavedení těchto funkcí zvládnout jednodušeji.

Poznámka 6.1.10. Z hlediska dnešních nároků na přesnost uvedené nepřesné charakteristiky neobstojí. Uveďme proto přesnější popis. Nechť je dána funkce f. Nechť existuje