Kapitola 2

Interpolace funkcí pomocí polynomů

2.1 Polynomiální interpolace

V této části se budeme zabývat následujícím problémem: Nechť je dán interval $[a, b]$, v němž jsou dány body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a předepsané hodnoty $f(x_0), \ldots, f(x_n)$, kde n je přirozené číslo. Hledáme funkci p daného typu, která vyhovuje podmínkám $p(x_i) = f(x_i),\ i = 0, \ldots, n$. Příkladem je *Lagrangeův interpolační polynom* p_n stupně nejvýše n, pro který je $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0, ..., n$. Pro takovýto polynom existuje jednoduché vyjádření pomocí vhodných bázových funkcí $l_i^n(x), i = 0, ..., n$ zvolených tak, že $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Takovéto funkce lze pro $n \geq 1$ vyjádřit ve tvaru

$$l_i^n(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Pro $n = 0$ definujeme jednoduše $l_0^0(x) = 1$. Lagrangeův interpolační polynom můžeme nyní napsat ve tvaru

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i^n(x).$$

Pro přesnost aproximace dostatečně hladké funkce takovýmto polynomem máme následující větu:

Věta 1 *Nechť n je přirozené číslo. Je-li $f \in C^{n+1}([a, b])$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ jsou navzájem různé, pak pro každé $x \in [a, b]$ existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Je-li aproximovaná funkce dokonce třídy C^∞ a má stejně omezené derivace, dostáváme následující výsledek.

Důsledek 1 *Buď $f \in C^\infty([a,b])$, $|f^{(k)}| \leq CK^k$ v $[a,b]$ pro všechna $k = 0,1,\ldots,$ s konstantami $C,K > 0$. Pak*

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq C\frac{K^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Tudíž, $p_n \to f$ v $[a,b]$ pro $n \to \infty$.

Cvičení 1 Uvažujme funkci $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0,1]$. Jaké největší chyby se můžeme dopustit, aproximujeme-li f pomocí p_9?

Pokaždé však nedosáhneme tak vynikající aproximace. Příkladem může být funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $[-5,5]$. Dá se dokázat, že pro interpolační polynomy p_n s uzly v bodech ekvidistantního dělení je posloupnost $\{\|f - p_n\|_{C([a,b])}\}_{n=1}^\infty$ neomezená.

Poznamejme také, že Lagrangeova interpolace je značně nepraktická a výpočetně náročná pro vyšší stupně n a nehodí se tudíž k interpolaci velkých sad dat.

2.2 Po částech polynomiální interpolace

Jednou z nevýhod aproximace interpolačním polynomem je skutečnost, že hodnoty interpolačního polynomu jsou silně ovlivněny hodnotami funkce f i ve vzdálených uzlech. To způsobuje, že interpolační polynom může silně oscilovat. Tuto potíž můžeme odstranit tak, že funkci f budeme aproximovat pomocí polynomů po částech. To znamená, že funkce f je aproximována v intervalu $[a,b]$ pomocí funkce φ takové, že $\varphi|_{[x_i,x_{i+1}]}$ je vhodný polynom. Většinou se navíc požaduje, aby φ byla třídy C^k pro dané k. Takovou funkci φ nazýváme *spline.*

Nejjednodušším případem ($k = 0$) je aproximace pomocí funkce po částech lineární, jejímž grafem je lomená čára. V praxi je většinou třeba lepší aproximace. Přijatelným řešením je tzv. *kubický spline.*

Definice 1 Nechť $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Řekneme, že funkce $\varphi : [x_0,x_n] \to I\!R$ je *kubický spline*, jestliže

(i) $\varphi \in C^2([x_0,x_n])$,

(ii) Pro $i = 0,\ldots,n-1$ je $\varphi|_{[x_i,x_{i+1}]}$ polynom stupně nejvýše 3.

Říkáme, že φ je *kubický interpolační spline* k f v bodech $x_0,\ldots x_n$, jestliže jsou navíc splněny podmínky $\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0,\ldots,n$.

Restrikci φ na $[x_i,x_{i+1}]$ označíme φ_i. Funkci φ_i lze psát ve tvaru

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3.$$

Funkce φ je tedy určena celkem $4n$ parametry. Podmínky z definice kubického interpolačního splinu nám však dávají jen $4n-2$ podmínek (hodnoty funkce φ v bodech $x_0, \ldots, x_n$ a spojitost $\varphi, \varphi', \varphi''$ v bodech $x_1, \ldots x_n$). Dá se tedy očekávat, že budeme muset ještě dva parametry zvolit. Nejčastěji se používají okrajové podmínky v krajních bodech x_0 a x_n, a to tří typů:

(α) $\varphi'(x_0) = f_0'$, $\varphi'(x_n) = f_n'$,

(β) $\varphi''(x_0) = f_0''$, $\varphi''(x_n) = f_n''$,

(γ) $\varphi''(x_0) = 0$, $\varphi''(x_n) = 0$,

kde f_0', f_n', f_0'', f_n'' jsou zadaná data. Kubický interpolační spline určený podmínkou (γ) se nazývá *přirozený spline.* Zvláštní zmínku zasluhuje také periodická interpolace periodických funkcí. V takovém případě se volí okrajové podmínky například ve tvaru

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_n),\ \varphi'(x_0) = \varphi'(x_n),\ \varphi''(x_0) = \varphi''(x_n),\ \varphi'''(x_0) = \varphi'''(x_n).$$

2.2.1 Konstrukce kubického splinu

Budeme konstruovat kubický interpolační spline určený podmínkou (β) (jíž je (γ) speciálním případem). Předpokládejme nejprve, že již známe čísla $M_i = \varphi''(x_i)$, tzv. *momenty splinu.* Funkce φ'' je spojitá a po částech lineární. Označíme-li $h_i = x_{i+1} - x_i$, potom pro $x \in [x_i, x_{i+1}]$ máme

$$\varphi_i''(x) = M_i + (M_{i+1} - M_i)\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1}\frac{x - x_i}{h_i}. \quad (2.2.1)$$

Integrací dostaneme funkce φ_i' a φ_i:

$$\begin{aligned} \varphi_i'(x) &= -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + M_{i+1}\frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + A_i & (2.2.2)\\ \varphi_i(x) &= M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1}\frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + A_i(x - x_i) + B_i. & (2.2.3) \end{aligned}$$

Pomocí známých hodnot $\varphi_i(x_i) = f(x_i)$, $\varphi_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ určíme konstanty A_i a B_i: $f(x_i) = \frac{1}{6}M_i h_i^2 + B_i$. Tudíž,

$$B_i = f(x_i) - \frac{1}{6}M_i h_i^2. \quad (2.2.4)$$

Dále, $f(x_{i+1}) = \frac{1}{6}M_{i+1}h_i^2 + A_i h_i + B_i$ a tedy

$$A_i = \frac{1}{h_i}\left(f(x_{i+1}) - \frac{1}{6}M_{i+1}h_i^2 - B_i\right) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i). \quad (2.2.5)$$

Zbývá určit hodnoty momentů M_i. M_0 a M_n máme zadané, ostatní vypočteme ze spojitosti derivace φ' v bodech $x_i, i = 1, \dots, n-1$, což znamená, že $\varphi_i'(x_i+) = \varphi_{i-1}'(x_i-)$. Podle (2.2.2) máme

$$\begin{aligned}\varphi_{i-1}'(x_i-) &= \frac{1}{2}M_i h_{i-1} + A_{i-1} = \\ &= \frac{1}{2}M_i h_{i-1} + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}(M_i - M_{i-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_i'(x_i+) &= -\frac{1}{2}M_i h_i + A_i = \\ &= -\frac{1}{2}M_i h_i + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i).\end{aligned}$$

Z rovnosti obou derivací dostaneme po úpravách

$$\begin{aligned}&M_{i-1}\frac{h_{i-1}}{6} + M_i\left(\frac{h_{i-1}+h_i}{3}\right) + M_{i+1}\frac{h_i}{6} \\ &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}}.\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Označíme-li $\lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$, $\mu_i = 1 - \lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}$, lze rovnici (2.2.6) přepsat ve tvaru

$$\lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = g_i, \tag{2.2.7}$$

kde g_i je pravá strana rovnice (2.2.6) vynásobená výrazem $\frac{6}{h_{i-1}+h_i}$. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}2M_1 + \mu_1 M_2 \qquad\qquad &= g_1 - \lambda_1 f_0'' \\ \lambda_2 M_1 + 2M_2 + \mu_2 M_3 &= g_2 \\ \lambda_3 M_2 + 2M_3 + \mu_3 M_4 &= g_3 \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1}M_{n-2} + 2M_{n-1} &= g_{n-1} - \mu_{n-1} f_n''.\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Definice 2 Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je *ostře diagonálně dominantní*, jestliže

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |a_{ij}| \qquad \text{pro } i = 1, \dots n. \tag{2.2.9}$$

Dokážeme-li nyní existenci a jednoznačnost řešení soustavy (2.2.8), budeme hotovi. Všimněme si, že všechny prvky matice soustavy jsou nezáporné, prvky na diagonále jsou vždy 2, zatímco součet všech ostatních prvků v libovolném řádku je mezi 0 a 1. Matice je tedy ostře diagonálně dominantní a tudíž regulární.

Cvičení 2 Dokažte, že každá ostře diagonálně dominantní matice je regulární.

Matice soustavy (2.2.8) je navíc třídiagonální, na které se poměrně jednoduše provádí eliminace. Soustava vypadá takto (uvažujeme obecný případ – matici $n \times n$):

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n. \end{pmatrix}$$

Při přímém chodu Gaussovy eliminace (tvorba horní trojúhelníkové matice) zmizí všechny prvky b_j a na diagonále se postupně objeví členy $A_{jj} = \eta_j$, kde

$$\eta_1 = a_1,\ \eta_2 = a_2 - \frac{b_1}{\eta_1} c_1, \quad \text{obecně } \eta_i = a_i - \frac{b_{i-1}}{\eta_{i-1}} c_{i-1} \quad (i = 2, \dots, n),$$

a ve vektoru pravých stran analogicky vzniknou čísla ξ_j, kde

$$\xi_1 = d_1,\ \xi_2 = d_2 - \frac{b_1}{\eta_1} \xi_1, \quad \text{obecně } \xi_i = d_i - \frac{b_{i-1}}{\eta_{i-1}} \xi_{i-1} \quad (i = 2, \dots, n).$$

Dostaneme tedy soustavu

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \eta_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \eta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n, \end{pmatrix}$$

z níž už snadno vypočítáme neznámé y_j:

$$y_n = \frac{\xi_n}{\eta_n},\ y_{n-1} = \frac{\xi_{n-1} - c_{n-1} y_n}{\eta_{n-1}}, \quad \text{obecně } y_i = \frac{\xi_i - c_i y_{i+1}}{\eta_i} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Je možné dokázat, že pro ostře diagonálně dominantní matici vyjdou po eliminaci prvky na diagonále nenulové.

2.2.2 Odhad chyby

Zabývejme se nyní otázkou, jaké chyby se dopustíme, aproximujeme-li funkci interpolačním kubickým splinem. Zhruba řečeno, je-li f dostatečně hladká v $[a, b]$ a dělení intervalu neomezeně zjemňujeme *vhodným způsobem*, pak interpolační kubické spliny konvergují stejnoměrně k f (případně i s některými derivacemi). Přesnou formulaci tohoto výsledku dává následující věta, kterou uvedeme bez důkazu (viz např. [9]).